

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik
- Werner-Heisenberg-Institut für Physik -

HADRONEN IN DER ZWEIDIMENSIONALEN QUANTENCHROMODYNAMIK:
KONSTRUKTION UND UNTERSUCHUNG VON BINDUNGSZUSTÄNDEN
MITTELS PERTURBATIVER UND NICHTPERTURBATIVER METHODEN

Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Dieter Zeppenfeld
aus München

München, 27. April 1984



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555212_0008

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik
- Werner-Heisenberg-Institut für Physik -

HADRONEN IN DER ZWEIDIMENSIONALEN QUANTENCHROMODYNAMIK:
KONSTRUKTION UND UNTERSUCHUNG VON BINDUNGSZUSTÄNDEN
MITTELS PERTURBATIVER UND NICHTPERTURBATIVER METHODEN

Dissertation der Fakultät für Physik der
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Dieter Zeppenfeld
aus München

München, 27. April 1984

Betreuer der Arbeit: Dr. R.D. Peccei

1. Gutachter: Professor Dr. H. Fritzsche

2. Gutachter: Professor Dr. H.-P. Dürr

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juli 1984

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Konstruktion und der Analyse mesonischer Bindungszustände in $SU(N)$ -Eichtheorien in einer zweidimensionalen Raum-Zeit. Die zugrundeliegende Feldtheorie kann dabei als vereinfachte Version der QCD, der Theorie der starken Wechselwirkung aufgefaßt werden.

Nach einer ausführlichen Diskussion der Quantisierung in der temporalen Eichung und nachdem die Poincaréinvarianz der Theorie gezeigt worden ist, werden mesonische Bindungszustände und das Mesonspektrum für verschiedene Bereiche der freien Parameter der Theorie (Quarkmasse, Kopplungskonstante und Index N der Eichgruppe) behandelt. Das Spektrum ist jeweils durch ein Randwertproblem gegeben, das im störungstheoretischen Grenzfall analytisch gelöst wird.

Für masselose Quarks werden eichvariante Vernichtungsoperatoren konstruiert, die eine exakte Lösung der Energieeigenwertgleichung erlauben. Die so gefundenen Energieeigenzustände beschreiben massive, wechselwirkende Mesonen, die von einer Wolke masseloser, freier Teilchen umgeben sind.

INHALTSVERZEICHNIS

1.	EINLEITUNG	1
2.	DEFINITION VON QCD_2	4
2.1.	Die klassische Theorie	4
2.2.	Quantisierung der Theorie	10
3.	MESONISCHE BINDUNGSZUSTÄNDE I	17
3.1.	Der störungstheoretische Grenzfall	17
3.2.	Quantisierung in Lichtkegelkoordinaten und die 't Hooft Gleichung	31
3.3.	Bosonisierung und starke Kopplung	36
4.	DER $U(1)$ -SEKTOR DER MASSELOSEN THEORIE	40
4.1.	$U(1)$ -Teilchen in der temporalen Eichung und das Thirring Modell	41
4.2.	"Angezogene" Quarkfelder	48
4.3.	Das Schwinger Modell	51
5.	MESONISCHE BINDUNGSZUSTÄNDE II	53
5.1.	Eichvariante Vernichtungsoperatoren	54
5.2.	Exakte Eigenzustände zu Energie und Impuls	60
5.3.	Analyse der Bindungsgleichungen	64
5.4.	Diskussion des Spektrums	69
6.	SCHLUSSBEMERKUNGEN	72
Anhang A:	NOTATION UND KONVENTIONEN	75
Anhang B:	IDENTITÄTEN FÜR MODIFIZIERTE STRINGOPERATOREN	77
	LITERATURVERZEICHNIS	81

1. EINLEITUNG

Eichtheorien haben sich in den vergangenen zehn bis fünfzehn Jahren als wichtigste und weithin favorisierte Kandidaten für eine konsistente Beschreibung der Phänomene der starken, elektromagnetischen und schwachen Wechselwirkung herausgestellt⁽¹⁾. Das Standardmodell zur Beschreibung der nicht gravitativen Erscheinungen ist heute eine $SU(2) \times U(1)$ Eichtheorie, wobei die phänomenologische Richtigkeit des elektroschwachen Sektors, d.h. der spontan gebrochenen $SU(2) \times U(1)$ Eichtheorie von Glashow, Salam und Weinberg in jüngster Zeit durch die Entdeckung der intermediären Vektorbosonen am europäischen Kernforschungszentrum CERN in Genf auf grandiose Weise bestätigt wurde⁽²⁾.

Voraussetzung für diese Bestätigung ebenso wie für den außerordentlich präzisen quantitativen Vergleich experimenteller Ergebnisse mit den Voraussagen der Quantenelektrodynamik (QED) (man denke nur an die anomalen magnetischen Momente von Elektron und Myon⁽³⁾ oder den Lamb-Shift⁽⁴⁾) war die Anwendbarkeit störungstheoretischer Methoden auf die elektroschwache Theorie. Demgegenüber ist die Quantenchromodynamik (QCD), die $SU(3)$ -Eichtheorie der starken Wechselwirkung nur für hochenergetische Prozesse einer störungstheoretischen Behandlung zugänglich, während die Masse der experimentellen Daten nur mittels nichtperturbativer Methoden quantitativ mit der Theorie verglichen werden kann (hierzu zählen z.B. die Versuche, das Hadronspektrum im Rahmen einer Gitterapproximation zu berechnen⁽²⁴⁾).

Um solche Methoden zu entwickeln und zu testen und um ein Gefühl für die Dynamik stark wechselwirkender Quantenfelder zu bekommen, ist es ratsam, zunächst einfache Modellsysteme zu untersuchen. Nun ergeben sich für Quantenfeldtheorien gewöhnlich starke Vereinfachungen durch Reduzierung der Anzahl der Raum-Zeit-Dimensionen. Speziell im zweidimensionalen Minkowski-Raum existiert eine Reihe von lösbaren oder zumindest teilweise lösbaren Modellen. Genannt seien hier nur Schwinger Modell⁽⁵⁻⁷⁾, Thirring Modell^(8,9), massives Thirring Modell^(10,11) und Sinus-Gordon-Gleichung^(10,12,13).

Es liegt daher nahe, auch allgemeine Eichtheorien zunächst in 1+1 Dimensionen zu untersuchen. Für das (massive) Schwinger Modell (QED_2)

ebenso wie für den Limes $N \rightarrow \infty$ der $U(N)$ -Eichtheorie⁽¹⁴⁾ existieren schon zahlreiche Ergebnisse, während wesentlich weniger über das Verhalten der zur QCD analogen $SU(N)$ -Eichtheorie mit endlichem N (QCD_2) bekannt ist.

In dieser Arbeit sollen daher neben der Weiterentwicklung einiger alter Ergebnisse neue Methoden zur Behandlung von QCD_2 entwickelt werden. Die Theorie wird dabei im Hamiltonschen Formalismus in der temporalen Eichung ($A_0 = 0$) formuliert werden. Diese spezielle Wahl der Eichung hat den Vorteil, daß das Eichfeld A_1 als dynamische Variable behandelt werden kann, während das Gauss'sche Gesetz in vielen anderen gebräuchlichen Eichungen (z.B. in der Coulomeichung) eine Reduzierung der Zahl der Freiheitsgrade vor Quantisierung der Theorie erzwingt. Eine vollständige Eliminierung des Eichfeldes, die in 1+1 Dimensionen durchaus möglich ist, da A_μ keine transversale Komponente besitzt, verdeckt zumindest jede Analogie zur vierdimensionalen Theorie, was den Wert von QCD_2 als vereinfachtes Modell für die starke Wechselwirkung erheblich herabsetzen würde. Daneben ist die QCD_2 natürlich auch als zweidimensionale Quantenfeldtheorie ein interessantes Studienobjekt, und beide Aspekte sollen in dieser Arbeit berücksichtigt werden.

Als erstes wird nun im zweiten Kapitel die QCD_2 definiert werden, zunächst als klassische Theorie und dann in der quantisierten Form. Während sich der klassische Teil eingehend mit den Eigenschaften des "Paralleltransporters" (d.h. der weggeordneten Exponentialfunktion des Eichfeldes) auseinandersetzt, der in der temporalen Eichung eine essentielle Rolle spielt, wird im Abschnitt 2.2 insbesondere auf die konsistente Definition zusammengesetzter Operatoren (z.B. der Quarkbilineare) eingegangen. Hierzu gehört auch der Energie-Impuls-Tensor, und in diesem Zusammenhang wird die Frage der Poincaré-Invarianz der QCD_2 diskutiert werden.

Im dritten Kapitel sollen einige approximative Verfahren zur Bestimmung des Mesonspektrums betrachtet werden. Bei schwacher Kopplung führt der Ortsraumformalismus der temporalen Eichung in natürlicher Weise auf eine Differentialgleichung für die Wellenfunktion der Mesonen, die bis zur Ordnung g^2 äquivalent zur üblicherweise betrachteten Integralgleichung⁽¹⁵⁾ ist. Überraschenderweise kann die Differentialgleichung exakt gelöst werden, und man erhält auf diese Weise ein lorentzinvariantes Me -

sonspektrum. In den Abschnitten 3.2. und 3.3. werden anschließend der Grenzfall $N = \infty$ und der Bereich starker Kopplung diskutiert, um die Natur des Übergangs zur masselosen QCD_2 aufzuhellen.

Bei verschwindender Quarkmasse enthält die Theorie freie, masselose Mesonen und Baryonen, die als $U(1)$ -Sektor zusammengefaßt werden können. Die Dynamik dieses $U(1)$ -Sektors wird durch einen Spezialfall des Thirring Modells beschrieben, und die entsprechende Identifikation wird im Abschnitt 4.1 vorgenommen. Abschnitt 4.2 beschäftigt sich dann mit einigen technischen Details, die für das fünfte Kapitel benötigt werden, und Abschnitt 4.3 enthält eine kurze Diskussion des Schwinger Modells in der temporalen Eichung.

Kapitel 5 widmet sich erneut der Konstruktion mesonischer Bindungszustände, diesmal für verschwindende Quarkmasse. In diesem Fall kann man Operatoren konstruieren, die sich bei eichinvariantem Einbau in einen String wie Vernichtungsoperatoren verhalten. Abschnitt 5.1 beschäftigt sich ausführlich mit den zugrundeliegenden Konzepten und untersucht die Bedingungen, die ein Operator erfüllen muß, damit er als eichvarianter Vernichter interpretiert werden kann. Im Abschnitt 5.2 werden diese Vernichtungsoperatoren dann benutzt, um exakte Eigenzustände zu Energie und Impuls zu konstruieren. Die Energien dieser Zustände ergeben sich aus den Lösungen einer nichtlinearen, nichtlokalen partiellen Differentialgleichung, die in Abschnitt 5.3 diskutiert wird, bisher aber nicht gelöst werden konnte. Eine qualitative Diskussion des Spektrums beschließt das fünfte Kapitel.

Das abschließende sechste Kapitel faßt dann die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen. Außerdem sollen noch kurz einige in der Literatur konträre Punkte diskutiert werden, die die Eigenschaften der masselosen Theorie betreffen.

2. DEFINITION VON QCD₂

2.1. Die klassische Theorie

Bevor wir uns der Definition von QCD₂ als Quantenfeldtheorie zuwenden, sollen einige grundlegende Begriffe und Größen zunächst anhand der klassischen Theorie zusammengestellt werden. Die Version der QCD₂, die in dieser Arbeit behandelt werden soll, beschreibt die Wechselwirkung eines Fermionfeldes $q_{i\alpha}(x,t)$ ($i=1, \dots, N$; $\alpha=1,2$) in der fundamentalen Darstellung von SU(N) (im folgenden kurz Quark genannt) mit dem Eichfeld $A_\mu^a(x,t)$ ($a=1, \dots, N^2-1$). Die Theorie ist definiert durch die Lagrange-dichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \bar{q} \left(\frac{i}{2} \gamma_\mu \overleftrightarrow{D}^\mu - m \right) q \\ &= -\frac{1}{2} \text{Sp} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{q} \left(\frac{i}{2} \gamma_\mu \overleftrightarrow{D}^\mu - m \right) q \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dabei ist

$$F_{\mu\nu} = \frac{\lambda^a}{2} F_{\mu\nu}^a = \frac{\lambda^a}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) \quad (2.2)$$

der antisymmetrische Feldstärketensor, der in 1+1 Dimensionen nur das farbelektrische Feld F_{01}^a enthält, und

$$D_\mu = \partial_\mu - ig A_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a \quad (2.3)$$

steht für die kovariante Ableitung in der fundamentalen Darstellung^{*)}.

Durch Variation der Wirkung erhält man in der üblichen Weise die Feldgleichungen

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^a + g f^{abc} A^{b\mu} F_{\mu\nu}^c + g j_\nu^a = 0 \quad (2.4a)$$

$$(i \gamma^\mu \overleftrightarrow{D}_\mu - m) q = 0 = \bar{q} (i \gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu - m) \quad (2.4b)$$

wobei

*) Die in dieser Arbeit verwendete Notation ist im Anhang A zusammengefaßt.

$$j_v^a = \bar{q} \gamma_v \frac{\lambda^a}{2} q \quad (2.5)$$

den Farbstrom der Quarkfelder bezeichnet.

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}$ ist invariant und die Feldgleichungen (2.4) transformieren sich kovariant unter lokalen Eichtransformationen von A_μ und q

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = U(x) A_\mu(x) U^\dagger(x) + \frac{i}{g} U(x) \partial_\mu U^\dagger(x) \\ q(x) &\rightarrow q'(x) = U(x) q(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

wobei die unitären Matrizen

$$U(x) = \exp \left\{ i \mathcal{J}^a(x) \frac{\lambda^a}{2} \right\} \quad (2.7)$$

durch die reellen Parameterfunktionen $\mathcal{J}^a(x)$ gegeben sind. Aus (2.6) kann man direkt das Transformationsverhalten zusammengesetzter Größen ableiten, wie z.B.

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &\rightarrow U(x) F_{\mu\nu}(x) U^\dagger(x) = \frac{\lambda^c}{2} (\exp \mathcal{J}^b(x) f^b)_{ca} F_{\mu\nu}^a(x) \\ j_v(x) &\rightarrow U(x) j_v(x) U^\dagger(x) = \frac{\lambda^c}{2} (\exp \mathcal{J}^b(x) f^b)_{ca} j_v^a(x) \end{aligned} \quad (2.8)$$

wobei f^b die $(N^2-1) \times (N^2-1)$ Matrix mit Komponenten $(f^b)_{ac} = f^{bac}$ bezeichnet. Insbesondere liest man aus (2.8) ab, daß sich $F_{\mu\nu}$ und j_v homogen unter der adjungierten Darstellung von $SU(N)$ transformieren, woraus direkt die Eichinvarianz des F^2 -Terms in $\mathcal{L}$ folgt.

Betrachtet man wie in der klassischen Elektrodynamik nur eichinvariante Größen als beobachtbar, so ergibt sich sofort die Notwendigkeit, ein Objekt P_x^y mit bilokalem Verhalten unter Eichtransformationen zu definieren,

$$P_x^Y \rightarrow (P_x^Y)' = U(x) P_x^Y U^\dagger(y) \quad (2.9)$$

sobald man auch nichtlokale Größen oder einzelne Quarks^{*)} betrachten möchte. Geometrisch bewirkt P_x^Y den Paralleltransport der Eicheigenschaften lokaler Objekte in der fundamentalen Darstellung von $SU(N)$ und kann in bekannter Weise als weggeordnete Exponentialfunktion des Eichfeldes A_μ geschrieben werden⁽¹⁶⁾

$$\begin{aligned} P_x^Y &= P \exp \left\{ -ig \int_0^1 ds \frac{d\gamma^\mu}{ds} A_\mu(\gamma(s)) \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-ig)^n \int_0^1 ds_1 \int_{s_1}^1 ds_2 \dots \int_{s_{n-1}}^1 ds_n \frac{d\gamma^{\mu_1}}{ds_1} A_{\mu_1}(\gamma(s_1)) \dots \frac{d\gamma^{\mu_n}}{ds_n} A_{\mu_n}(\gamma(s_n)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

wobei $\gamma(s)$, $0 \leq s \leq 1$ eine Parametrisierung eines Weges Γ von x nach y ist, und die Operation P die $N \times N$ Matrizen $A_\mu(\gamma(s))$ entlang des Weges anordnet. Im Rahmen dieser Arbeit kann die Wegabhängigkeit von P_x^Y vollständig eliminiert werden, da im Rahmen einer Hamiltonschen Formulierung alle Felder als gleichzeitige Felder zu verstehen sind. Damit kann $x^0 = y^0$ und der Weg zwischen x und y als die eindeutig bestimmte Verbindung zur Zeit x^0 gewählt werden. (2.10) reduziert sich damit auf

$$\begin{aligned} P_x^Y &= P \exp \left\{ -ig \int_x^y dz A_1(z) \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-ig)^n \int_x^y dz_1 \dots \int_{z_{n-1}}^y dz_n A_1(z_1, t) A_1(z_2, t) \dots A_1(z_n, t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

(Hier wurden x und y zur Bezeichnung von Raumpunkten zur Zeit t benutzt. Diese Konvention soll im Folgenden beibehalten werden. Falls notwendig, wird die Zeit t explizit angegeben werden).

Das bilokale Eichverhalten von P_x^Y folgt aus der inhomogenen Transformation von A_1 (Gl.(2.6)). Addiert man zu A_1 Größen 0 , die sich homogen unter der adjungierten Darstellung von $SU(N)$ transformieren, so hat folglich

*) Eine mögliche Definition für ein einzelnes Quark am Ort y wäre etwa

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P_x^Y q(y)$$

$$P(0)_x^y = P \exp \left\{ -ig \int_x^y dz (A_1(z) + O(z)) \right\} \quad (2.12)$$

das gleiche Verhalten unter Eichtransformationen wie P_x^y . Damit kann anstelle des einfachen Strings P_x^y ebensogut der "modifizierte String" $P(0)_x^y$ verwendet werden, um eichinvariante, nichtlokale Objekte zu bilden.

Zur Konstruktion von Bindungszuständen werden wir modifizierte Stringoperatoren ausgiebig benützen. Es ist daher nützlich, schon hier einige ihrer Eigenschaften zusammenzustellen.

i) Aus der Definition als weggeordnete Exponentialfunktion ergibt sich die Multiplikationseigenschaft

$$P(0)_x^y P(0)_y^z = P(0)_x^z \quad (2.13)$$

ii) Mittels der Potenzreihendarstellung von $P(0)_x^y$ findet man für die Ableitung nach den Endpunkten

$$\vec{D}_x P(0)_x^y = (\partial_x - ig A_1(x)) P(0)_x^y = ig O(x) P(0)_x^y \quad (2.14a)$$

$$P(0)_x^y \overleftarrow{D}_y = -\partial_y P(0)_x^y - ig P(0)_x^y A_1(y) = P(0)_x^y ig O(y) \quad (2.14b)$$

iii) Angenommen O hängt von einem Parameter λ ab. Dann ergibt Differentiation nach λ

$$\begin{aligned} \partial_\lambda P(O(\lambda))_x^y &= \sum_{n=1}^{\infty} (-ig)^n \int_x^y dz_1 \dots \int_{z_{n-1}}^y dz_n \sum_{k=1}^n (A_1 + O)(z_1) \dots (A_1 + O)(z_{k-1}) \\ &\quad \partial_\lambda O(\lambda, z_k) (A_1 + O)(z_{k+1}) \dots (A_1 + O)(z_n) \\ &= -ig \int_x^y dz \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \int_x^z dz_1 \dots \int_{z_{k-1}}^z dz_k (A_1 + O)(z_1) \dots (A_1 + O)(z_k) \partial_\lambda O(\lambda, z) \\ &\quad \int_z^y dz_{k+1} \dots \int_{z_{n-1}}^y dz_n (A_1 + O)(z_{k+1}) \dots (A_1 + O)(z_n) \\ &= -ig \int_x^y dz P(0)_x^z \partial_\lambda O(\lambda, z) P(0)_z^y \end{aligned} \quad (2.15)$$

Zur Ableitung von (2.15) wird im wesentlichen nur die Produktregel der Differentiation benötigt. Eine zu (2.15) analoge Beziehung ergibt sich daher für jede Operation, die die Produktregel erfüllt. Insbesondere gilt für Kommutatoren

$$[B, P(0)_x^\gamma] = -ig \int_x^\gamma dz P(0)_x^z [B, A_1(z) + O(z)] P(0)_z^\gamma \quad (2.16)$$

iv) Eine in den (modifizierten) String eingeschobene kovariante Ableitung $D_1 Q(x) = \frac{\lambda^a}{2} (\partial_x Q^a(x) + g f^{abc} A_1^b(x) Q^c(x))$ kann partiell integriert werden:

$$\begin{aligned} \int_x^\gamma dz P(0)_x^z D_1 Q(z) P(0)_z^\gamma &= \int_x^\gamma dz P(0)_x^z \{ \partial_z Q(z) - ig [A_1(z), Q(z)] \} P(0)_z^\gamma \\ &= \int_x^\gamma dz \left\{ \frac{d}{dz} [P(0)_x^z Q(z) P(0)_z^\gamma] + P(0)_x^z [\overleftarrow{D}_z Q(z) - Q(z) \overrightarrow{D}_z] P(0)_z^\gamma \right\} \\ &= P(0)_x^\gamma Q(\gamma) - Q(x) P(0)_x^\gamma + ig \int_x^\gamma dz P(0)_x^z [O(z), Q(z)] P(0)_z^\gamma \end{aligned} \quad (2.17)$$

Bevor wir uns Fragen der Quantisierung zuwenden können, benötigen wir noch den klassischen Energie-Impuls-Tensor. In der kanonischen Formulierung ist er gegeben durch

$$\begin{aligned} \bar{\Theta}_{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu A^{\sigma a})} \partial_\nu A^{\sigma a} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu q_j)} \partial_\nu q_j + (\partial_\nu \bar{q}_j) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \bar{q}_j)} - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ &= F_{\sigma\mu}^a \partial_\nu A^{\sigma a} + \frac{i}{2} \bar{q} \gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu q - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \end{aligned} \quad (2.18)$$

und ist in dieser Form weder eichinvariant noch symmetrisch, was jedoch durch Addition von

$$\partial^\sigma \left\{ \frac{i}{8} \bar{q} (\gamma_\nu \gamma_\sigma \gamma_\mu - \gamma_\mu \gamma_\sigma \gamma_\nu) q + F_{\mu\sigma}^a A_\nu^a \right\} + A_\nu^a G_\mu^a \quad (2.19)$$

behooben werden kann, wenn man die Feldgleichungen (2.4b) für die Fermionfelder benutzt, nicht jedoch die Feldgleichung für die Eichfelder

$$G_{\mu}^a \equiv \partial^{\nu} F_{\nu\mu}^a + g f^{abc} A^{\nu b} F_{\nu\mu}^c + g j_{\mu}^a = 0 \quad (2.20)$$

vorausgesetzt^{*)}. Man erhält damit den eichinvarianten, symmetrischen Energie-Impuls-Tensor

$$\tilde{\theta}_{\mu\nu} = F_{\sigma\mu}^a F_{\nu}^{a\sigma} + \frac{i}{4} \bar{q} (\overset{\leftrightarrow}{D}_{\mu} \gamma_{\nu} + \overset{\leftrightarrow}{D}_{\nu} \gamma_{\mu}) q - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \quad (2.21)$$

der sich bis auf den $A_{\nu}^a G_{\mu}^a$ Term nur durch die totale Divergenz eines antisymmetrischen Tensors von $\tilde{\theta}_{\mu\nu}$ unterscheidet und damit die gleiche differentielle Energie-Impulserhaltung und die gleichen Erhaltungsgrößen

$$P^{\nu} = \int dx \theta^{0\nu}(x) \quad (2.22)$$

liefert wie $\tilde{\theta}_{\mu\nu}$ falls man Gl.(2.20) benutzt. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, gilt das Gauss'sche Gesetz $G_0^a = 0$ bei Quantisierung in der temporalen Eichung jedoch nur im Sektor der physikalischen Zustände, und damit darf $\tilde{\theta}_{\mu\nu}$ nicht zur Definition der Poincaré Generatoren herangezogen werden. Stattdessen werden wir

$$\theta_{\mu\nu} = \tilde{\theta}_{\mu\nu} - G_{\mu}^a A_{\nu}^a \quad (2.23)$$

benutzen, womit die Eichinvarianz des Energie-Impuls-Tensors zumindest im physikalischen Sektor garantiert ist.

In diesem Abschnitt haben wir bisher nur $SU(N)$ Eichtheorien betrachtet. Alle Überlegungen gelten jedoch (bis auf zum Teil starke Vereinfachungen) ganz analog auch für den $U(1)$ -Fall. Formal erhält man den Übergang zum Schwinger Modell, indem man den Farbindex a auf $a = 1$ beschränkt und $\lambda^1 = \sqrt{2}$ setzt. Die Kopplungskonstante g ist dann $\sqrt{2}$ mal die übliche Kopplungskonstante e der QED. Zu Vergleichszwecken ist es nützlich, im Folgenden stets auch den $U(1)$ -Fall im Auge zu behalten.

*) In (2.19) ist $\bar{q} (\gamma_{\nu} \gamma_{\sigma} \gamma_{\mu} - \gamma_{\mu} \gamma_{\sigma} \gamma_{\nu}) q$ total antisymmetrisch in μ, σ, ν und verschwindet daher in zwei Dimensionen identisch.

2.2 Quantisierung der Theorie

Aus der Lagrangedichte $\mathcal{L}$ erhält man durch Variation der Wirkung $S = \int dt dx \mathcal{L}(x, t)$ die zu $q_{j\alpha}$, A_1^a und A_0^a kanonisch konjugierten Impulse

$$\frac{\delta S}{\delta(\partial_0 q_{j\alpha}(x, t))} = i q_{j\alpha}^+(x, t) \quad (2.24a)$$

$$\frac{\delta S}{\delta(\partial_0 A_1^a(x, t))} = F_{01}^a(x, t) \quad (2.24b)$$

$$\frac{\delta S}{\delta(\partial_0 A_0^a(x, t))} = 0 \quad (2.24c)$$

Wir können die Theorie damit kanonisch quantisieren, indem wir

$$\{q_{i\alpha}(x, t), q_{j\beta}^+(y, t)\} = \delta_{ij} \delta_{\alpha\beta} \delta(x-y) \quad (2.25a)$$

$$[A_1^a(x, t), F_{01}^b(y, t)] = i \delta^{ab} \delta(x-y) \quad (2.25b)$$

und das Verschwinden aller übrigen gleichzeitigen (Anti-)Kommutatoren fordern. Da A_0 keinen kanonisch konjugierten Impuls besitzt, vertauscht es mit allen übrigen Feldern und kann daher als c-Zahl-Feld interpretiert werden. Die temporale Eichung $A_0 = 0$ wird damit durch eine reine c-Zahl Eichtransformation erreicht.

Der wesentliche Unterschied der temporalen Eichung zu anderen gebräuchlichen Eichungen besteht jedoch darin, daß die Gültigkeit des Gauss'schen Gesetzes nicht als Operatoridentität

$$G^a(x) \equiv \partial_1 F_{01}^a(x) + g f^{abc} A_1^b(x) F_{01}^c(x) + g j_0^a(x) = 0 \quad (2.26)$$

sondern nur bei Projektion auf physikalische Zustände gefordert wird:

$$G^a(x) | \text{physikalischer Zustand} \rangle = 0 \quad (2.27)$$

Da $G^a(x)$ der Generator lokaler, zeitunabhängiger Eichtransformationen ist, werden physikalische Zustände damit genau als eichinvariante Zustände identifiziert⁽¹⁷⁾.

Bevor wir uns der Konstruktion der Poincaré-Generatoren zuwenden, müssen wir zunächst zusammengesetzte Operatoren definieren, was durch eichkovariantes Point-Splitting geschehen soll. Dabei kann man ausnützen, daß Eichtheorien in zwei Dimensionen superrenormierbar und asymptotisch frei sind, und damit ist das führende Verhalten von Operatorprodukten für kleine raumartige Abstände durch das der freien Theorie gegeben. Speziell für Quarkfelder wird das singuläre Verhalten für kurze Abstände daher isoliert, indem man schreibt

$$q_i(x,t) \bar{q}_j(y,t) = : q_i(x,t) \bar{q}_j(y,t) : + W_0(x-y) \delta_{ij} \quad (2.28)$$

mit

$$W_0(x-y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{x-y-i\varepsilon} \\ \frac{-1}{x-y+i\varepsilon} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

$$= \frac{i}{2\pi} \text{H.W.} \frac{\gamma_1}{x-y} + \frac{1}{2} \gamma_0 \delta(x-y)$$

W_0 ist die gleichzeitige Wightman-Funktion eines freien masselosen Dirac-Feldes, und damit bedeutet $: :$ Normalordnung bezüglich eines freien masselosen Dirac-Feldes. Obwohl $: q_i(\varepsilon, t) \bar{q}_j(0, t) :$ für ein freies massives Feld noch immer wie $m \ln(m\varepsilon)$ divergiert, kann die in (2.28) definierte Normalordnung für diese Arbeit als hinreichend betrachtet werden, da logarithmisch divergente Terme in allen folgenden Abschnitten ohne Bedeutung sind.

Die Quarkströme werden nun wie folgt definiert

$$\begin{aligned} j_\mu^a(x) &= s \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{q}(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu P_x^{x+\varepsilon} q(x+\varepsilon) \\ &= : \bar{q}(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_\mu q(x) : - s \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} S_P[W_0(\varepsilon) \gamma_\mu] S_P\left[\frac{\lambda^a}{2} P_x^{x+\varepsilon}\right] \\ &= j_{\mu f}^a(x) + \delta_{\mu 1} \frac{g}{2\pi} A_1^a(x) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Dabei garantiert das Einfügen von $\rho_x^{x+\varepsilon}$, daß sich der Strom auch für $\varepsilon \neq 0$ unter der adjungierten Darstellung von $SU(N)$ am Punkt x transformiert. Ferner steht $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon)$ für den symmetrischen Limes $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} (f(\varepsilon) + f(-\varepsilon))$ und $j_{\mu f}$ bezeichnet den Quarkstrom der freien Theorie. Andere Quarkbilineare werden analog definiert. Insbesondere erhält man für die $U(1)$ -Ströme der $SU(N)$ Theorie

$$\begin{aligned} \bar{j}_{\mu}(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{q}(x) \gamma_{\mu} \rho_x^{x+\varepsilon} q(x+\varepsilon) \\ &= : \bar{q}(x) \gamma_{\mu} q(x) : \end{aligned} \quad (2.31)$$

Mit der gleichen Pointsplitting Definition werden auch Kommutatoren von Quarkbilinearen bestimmt. Nach kurzer Rechnung erhält man z.B.

$$[j_0^a(x), j_0^b(y)] = [j_1^a(x), j_1^b(y)] = i f^{abc} j_0^c(x) \delta(x-y) \quad (2.32a)$$

$$[j_0^a(x), j_1^b(y)] = i f^{abc} j_1^c(x) \delta(x-y) + \frac{i}{2\pi} \delta^{ab} \partial_x \delta(x-y) \quad (2.32b)$$

$$[j_{\mu}^a(x), \bar{j}_{\nu}(y)] = 0 \quad (2.32c)$$

$$[\bar{j}_{\mu}(x), \bar{j}_{\nu}(y)] = i \varepsilon_{\mu\nu} \frac{iN}{\pi} \partial_x \delta(x-y) \quad (2.32d)$$

Die auf der rechten Seite von (2.32b,d) auftauchende Ableitung der δ -Funktion ist der wohlbekannte Schwingerterm⁽¹⁸⁾, der in 1+1 Dimensionen endlich ist.

Bisher haben wir nur Produkte von Quarkfeldern betrachtet. Für Eichfelder findet man zunächst, daß wegen $F_{01} = \partial_0 A_1$ Produkte der Form $F_{01}^a(\varepsilon) F_{01}^b(0)$ um zwei Potenzen von ε stärker singulär sein müssen als $A_1^a(\varepsilon) A_1^b(0)$. Nimmt man zusätzlich an, daß die führende Singularität durch die entsprechenden Vakuumerwartungswerte gegeben ist, so findet man bei Betrachtung von $\langle \Omega | G^a(\varepsilon) G^b(0) | \Omega \rangle = 0$, daß $\langle \Omega | F_{01}^a(\varepsilon) F_{01}^b(0) | \Omega \rangle$ wie $\log \varepsilon$

divergieren muß^{*)}, da die quadratische Divergenz von $\langle \Omega | j_0^a(\epsilon) j_0^b(0) | \Omega \rangle$ nur durch $\langle \Omega | \partial_1 F_{01}^a(\epsilon) \partial_1 F_{01}^b(0) | \Omega \rangle$ kompensiert werden kann. Man findet also, daß gleichzeitige Produkte von Eichfeldern und/oder farbelektrischen Feldern um zwei Potenzen von ϵ weniger singulär sind als die entsprechenden Produkte von freien, massiven Bosefeldern, und die einzige vorkommende Divergenz (nämlich $F_{01}^a(x) F_{01}^b(y) \sim g^2 \ln |x-y|$) wird uns im Folgenden nirgends stören.

Der Grund für dieses Verhalten wird klar, wenn man beachtet, daß in der Hamiltondichte (2.21) keine Ableitungen von A_1 oder F_{01} auftauchen. In führender Ordnung (in g) ist der Gluonsektor der QCD₂ also ultralokal, und damit werden raumartige Korrelationen zwischen den Gluonen nur über die Wechselwirkung mit den Quarks erzeugt, was schließlich zum logarithmischen Verhalten von $\langle \Omega | F_{01}^a(x) F_{01}^b(y) | \Omega \rangle$ führt.

Wir können nun die Generatoren der Poincaré-Algebra konstruieren. Klassisch sind Energie H , Impuls P und der Erzeuger infinitesimaler Schübe $M^{01} = tP - K$ gegeben durch⁽¹⁶⁾

$$H = \int dx \theta^{00}(x), \quad P = \int dx \theta^{01}(x), \quad K = \int dx x \theta^{00}(x) \quad (2.33)$$

mit

$$\theta_{00} = \frac{1}{2} (F_{01}^a)^2 + \bar{q} \left(\frac{i}{2} \gamma_1 \overleftrightarrow{\partial}_1 + m \right) q + g A_1^a \bar{q} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_1 q \quad (2.34a)$$

$$\theta_{01} = \frac{i}{2} q^+ \overleftrightarrow{\partial}_1 q - A_1^a \partial_1 F_{01}^a = \frac{i}{2} q^+ \overleftrightarrow{D}_1 q - A_1^a G^a \quad (2.34b)$$

θ_{01} ist quadratisch in den Feldern und kann damit direkt quantisiert werden, indem man klassische Felder durch die entsprechenden Operatoren ersetzt. Der Impulsoperator ist folglich

*) Dieses logarithmische Verhalten für kleine Abstände ergibt sich genau für die entsprechende Wightman-Funktion des Schwinger-Modells, wenn man die Lowenstein-Swieca-Lösung⁽⁶⁾ benützt.

$$P = - \int dx \left\{ i q^+(x) \partial_x q(x) + F_{01}^a(x) \partial_x A_1^a(x) \right\} \quad (2.35a)$$

Im Impulsraum ist der Integrand von P ungerade und daher verschwindet der Vakuumerwartungswert von P

$$\langle \Omega | P | \Omega \rangle = 0 \quad (2.35b)$$

Von der expliziten Form (2.35a) her ist klar, daß P infinitesimale Translationen der fundamentalen Felder erzeugt. Damit gilt auch für beliebige durch Pointsplitting definierte, zusammengesetzte, lokale Operatoren $\phi(x)$

$$i [P, \phi(x)] = \partial^1 \phi(x) = - \partial_x \phi(x) \quad (2.36)$$

Bei der Quantisierung von θ^{00} stellt sich sofort die Frage, welcher Quarkstrom im Wechselwirkungsterm einzusetzen ist. Der Unterschied zwischen j_1^a und j_{1f}^a macht sich als ein $(A_1^a)^2$ -Term im resultierenden Hamiltonoperator bemerkbar, und damit kann diese Frage nur für die Zeitableitung von F_{01}^a von Bedeutung sein. Tatsächlich reproduzieren die Heisenberggleichungen in beiden Fällen die Bewegungsgleichungen für die Quarks

$$\begin{aligned} i [H, q(x)] &= (\gamma_5 \vec{D}_1 - i m \gamma_0) q(x) = \partial_0 q(x) \\ i [H, \bar{q}(x)] &= \bar{q}(x) (\vec{D}_1 \gamma_5 + i m \gamma_0) = \partial_0 \bar{q}(x) \end{aligned} \quad (2.37)$$

und die Eichfelder

$$i [H, A_1(x)] = F_{01}(x) = \partial_0 A_1(x) \quad (2.38)$$

und der $(A_1^a)^2$ -Term muß nun so gewählt werden, daß die Heisenberggleichung für das elektrische Feld die Bewegungsgleichung (2.4a) mit dem eichkovarianten Strom j_1^a als Inhomogenität reproduziert

$$i [H, F_{01}(x)] = -g j_1(x) = \partial_0 F_{01}(x) \quad (2.39)$$

Die richtige Wahl erweist sich genau als das arithmetische Mittel von j_1 und j_{1f} und damit erhält man den Energiedichteoperator

$$\theta_q^{00} = \frac{1}{2} (F_{01}^a)^2 + \bar{q} \left(\frac{i}{2} \gamma_1 \overleftrightarrow{\partial}_1 + m \right) q + g A_1^a j_{11}^a + \frac{g^2}{4\pi} (A_1^a)^2 \quad (2.40)$$

Auf den ersten Blick scheint der $(A_1^a)^2$ -Term die Eichinvarianz von θ_q^{00} explizit zu verletzen. Bei Berechnung von $[G^a(x), \theta_q^{00}(y)]$ stellt man jedoch fest, daß auf Grund des Schwingerterms in Gl.(2.32b) genau dieser $(A_1^a)^2$ -Term benötigt wird, um θ_q^{00} eichinvariant zu machen.

Indem wir noch einen möglichen Vakuumerwartungswert von θ_q^{00} subtrahieren, erhalten wir so den eichinvarianten Hamiltonoperator

$$H = \int dx \left\{ \theta_q^{00}(x) - \langle \Omega | \theta_q^{00}(x) | \Omega \rangle \right\} \quad (2.41)$$

Am Rande sei hier noch bemerkt, daß durch Addition eines zusätzlichen Terms $-\int dx A_0^a(x) G^a(x)$ zu H die vollen Bewegungsgleichungen (2.2) und (2.4) mit beliebigem A_0 reproduziert werden können. Dies kann man so interpretieren, daß die Zeitentwicklung eines Operators ohne Eichfixierung gegeben ist durch die Zeitentwicklung in der temporalen Eichung sowie eine zusätzliche Eichtransformation mit A_0 .

Um nun die Poincaré-Algebra untersuchen zu können, definieren wir noch

$$K = \int dx x \left\{ \theta_q^{00}(x) - \langle \Omega | \theta_q^{00}(x) | \Omega \rangle \right\} \quad (2.42)$$

Die Kommutatoren mit P ergeben sich direkt aus (2.36)

$$i [H, P] = 0 \quad (2.43a)$$

$$i [P, K] = H \quad (2.43b)$$

und für den Kommutator von H und K erhält man

$$\begin{aligned} i [H, K] &= - \int dx \left\{ i q^+(x) \partial_1 q(x) + g A_1^a(x) j_0^a(x) \right\} \\ &= P + \int dx A^{1a}(x) G^a(x) \end{aligned} \quad (2.43c)$$

anstelle der gewünschten Beziehung $i [H, K] = P$. Gl.(2.43c) kann zwar kor-

rigiert werden, indem man statt $\theta^{\mu\nu}$ den symmetrischen, eichinvarianten Tensor $\tilde{\theta}^{\mu\nu}$ zur Definition des Impulses heranzieht, d.h. indem man zu θ^{01} den Zusatzterm $A_1^a G^a$ addiert, allerdings tauchen dann in (2.43a,b) neue Terme proportional $F_{01}^a G^a$ auf. Damit ist klar, daß Poincaré-Invarianz nur innerhalb des Sektors eichinvarianten, d.h. physikalischer Zustände erwartet werden kann^{*)}. Doch auch für die physikalischen Zustände, die im Folgenden konstruiert werden sollen, muß noch die Invarianz unter Operator-Eichtransformationen gezeigt werden, die durch $\int dx A_1^a(x) G^a(x)$ erzeugt werden.

Mit dem oben konstruierten Hamiltonoperator können nun auch die Zeitableitungen zusammengesetzter Operatoren bestimmt werden, die durch Pointsplitting definiert sind. Die folgenden Ergebnisse werden wir in den weiteren Rechnungen noch benötigen:

$$\begin{aligned}
 i [H, j_1^a(x)] &= (D_1 j_0)^a(x) + 2mi M_1^a(x) + \frac{g}{2\pi} F_{01}^a(x) \\
 i [H, j_0^a(x)] &= (D_1 j_1)^a(x) \\
 i [H, M_1^a(x)] &= : \bar{q}(x) \overleftarrow{D}_1 \frac{\lambda^a}{2} q(x) : + : \bar{q}(x) \frac{\lambda^a}{2} \overrightarrow{D}_1 q(x) : \\
 &\quad + 2mi j_1^a(x) \\
 i [H, \tilde{j}_0(x)] &= \partial_1 \tilde{j}_1(x) \\
 i [H, \tilde{j}_1(x)] &= \partial_1 \tilde{j}_0(x) + 2mi \bar{M}_1(x)
 \end{aligned} \tag{2.44a-e}$$

Dabei bezeichnen $\bar{M}_1$ und M_1^a die pseudoskalaren Dichten

$$\begin{aligned}
 \bar{M}_1(x) &= s \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{q}(x) \gamma_5 P_x^{x+\varepsilon} q(x+\varepsilon) \\
 M_1^a(x) &= s \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{q}(x) \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} P_x^{x+\varepsilon} q(x+\varepsilon)
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

*) Überraschenderweise ist dieses Resultat nicht auf die temporale Eichung beschränkt, sondern gilt in ähnlicher Form auch in der Coulomb-Eichung, wie Bars und Green in ihrer Arbeit gezeigt haben⁽¹⁹⁾.

und das Kürzel D_1 wurde auch für die kovariante Ableitung in der adjungierten Darstellung verwendet.

Aufgrund der Beziehung $\gamma_\mu \gamma_5 = \varepsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu$ kann Gl.(2.44a) auch als Zeitableitung des Axialstromes

$$j_{\mu 5}^a(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{q}(x) \gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^a}{2} P_x^{x+\varepsilon} q(x+\varepsilon) = \varepsilon_{\mu\nu} j^{\nu a}(x) \quad (2.46)$$

geschrieben werden,

$$\partial_0 j_{05}^a - (D_1 j_{15})^a = (D^\mu j_{\mu 5})^a = 2m i M_1^a + \frac{g}{2\pi} F_{01}^a \quad (2.47)$$

womit die Anomalie des axialen Farbstromes manifest wird. Im Schwinger-Modell verursacht genau diese Anomalie die Masse des Photons⁽²⁰⁾.

3. MESONISCHE BINDUNGSZUSTÄNDE I

Da das Coulombpotential in einer Dimension linear ansteigt (es ist durch $\frac{1}{2} |x-y|$ gegeben), ist Confinement von geladenen Objekten wie Quarks und Gluonen in zweidimensionalen Eichtheorien offensichtlich. Die einfachsten Bindungszustände, die als Eigenzustände von Energie und Impuls in Frage kommen, sind folglich Mesonen, in denen ein Quark und ein Anti-quark gegenseitig ihre Farbladung kompensieren. Solche mesonischen Bindungszustände und speziell Operatoren, die sie aus dem Vakuum erzeugen, sollen im Folgenden untersucht werden.

Die QCD_2 ist im wesentlichen von zwei dimensionslosen Parametern abhängig: vom Index N der Eichgruppe, und von $g = m^2/(g^2 N)$. In diesem Kapitel sollen nun Approximationen betrachtet werden, die sich für Grenzwerte dieser beiden Parameter ergeben. Die nächsten drei Abschnitte beschäftigen sich mit dem störungstheoretischen Grenzfall $g \rightarrow \infty$, mit dem "Large N Limit", und mit dem Verhalten der QCD_2 für kleines N g .

3.1. Der störungstheoretische Grenzfall

Für kleine Kopplungskonstante g sind mesonische Bindungszustände in der QCD_2 ausführlich von Hanson, Peccei und Prasad⁽¹⁵⁾ untersucht worden.

In Anlehnung an entsprechende Arbeiten Colemans über das massive Schwinger Modell⁽²¹⁾ quantisieren sie die Theorie in der axialen Eichung $A_4^a = 0$ (die in 1+1 Dimensionen äquivalent zur Coulomb-Eichung ist). In dieser Eichung lautet das Gauss'sche Gesetz

$$\partial_4 F_{04}(x) + g j_0(x) = 0 \quad (3.1)$$

und wird somit identisch erfüllt, indem man

$$F_{04}(x) = g \int_{-\infty}^{\infty} d\gamma \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\gamma - x) j_0(\gamma) \quad (3.2)$$

setzt. Damit kann F_{04} in der Hamiltondichte (2.21) eliminiert werden, und man erhält den Hamiltonoperator

$$H = N_m \left\{ \int dx \bar{q}(x) (i\gamma_4 \partial_4 + m) q(x) - \frac{g^2}{4} \iint dx d\gamma j_0^a(x) j_0^a(\gamma) |x - \gamma| \right\} \quad (3.3)$$

der in dieser Form im ungeladenen Sektor der Theorie gültig ist^(15,19). N_m bedeutet dabei, daß bezüglich eines freien Dirac-Feldes der Masse m normalgeordnet wird, d.h. das Quarkfeld wird nach Lösungen der freien Dirac-Gleichung entwickelt

$$q_{i\alpha}(x, t) = \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{m}{E_p}} \left\{ b_i(p, t) u_\alpha(p) e^{ipx} + d_i^\dagger(p, t) v_\alpha(p) e^{-ipx} \right\} \quad (3.4)$$

mit $E_p = +\sqrt{p^2 + m^2}$ und

$$u(p) = \sqrt{\frac{m}{2(E_p + p)}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{E_p + p}{m} \end{pmatrix}, \quad v(p) = \sqrt{\frac{m}{2(E_p + p)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{E_p + p}{m} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

und der Hamiltonoperator wird bezüglich $b_i^{(+)}(p, t), d_i^{(+)}(p, t)$ für festes t normalgeordnet.

In dieser Formulierung kann man nun mesonische Bindungszustände $|M\rangle$ mit Impulseigenwert K durch

$$|M(\omega_K, K)\rangle = \int dp \phi_K(p) b_i^\dagger(p) d_i^\dagger(K-p) |0; m\rangle \quad (3.6)$$

definieren^{*)}, wobei die Wellenfunktion $\phi_K(p)$ so bestimmt werden muß, daß $|M\rangle$ die Eigenwertgleichung

$$H |M(\omega_K, K)\rangle = \omega_K |M(\omega_K, K)\rangle \quad (3.7)$$

erfüllt. Da der Coulombterm in (3.3) Quark-Antiquark-Paare erzeugt und vernichtet, kann Gl.(3.7) nicht exakt erfüllt werden. Beiträge zur Zweiteilchenwellenfunktion $\phi_K(p)$ durch solche Vakuumfluktuationen sind aber proportional g^4 , und damit kann man sich bis zur Ordnung g^2 auf den Zweiteilchenteilraum beschränken⁽²¹⁾. Hanson et al.⁽¹⁵⁾ erhalten auf diese Weise folgende Schrödingergleichung für das Mesonspektrum, die sie in ihrer Arbeit anschließend numerisch lösen:

$$\begin{aligned} \omega_K \phi_K(p) = & \left\{ E_p + E_{K-p} - \frac{G^2}{2\pi} \left(\frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_{K-p}} \right) \right\} \phi_K(p) \\ & - \frac{G^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \frac{\phi_K(\tau)}{(\tau-p)^2} \left[\frac{E_\tau E_p + \tau p + m^2}{2 E_\tau E_p} \right]^{1/2} \left[\frac{E_{K-\tau} E_{K-p} + (K-\tau)(K-p) + m^2}{2 E_{K-\tau} E_{K-p}} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

mit $G^2 = g^2 \frac{N^2 - 1}{2N}$.

Um die Äquivalenz zur Coulomb-Eichung zu zeigen, soll die Schrödingergleichung (3.8) nun in der temporalen Eichung abgeleitet werden. Wir beginnen mit dem zu (3.6) analogen eichinvarianten Zustand

$$|M\rangle = M |\Omega\rangle = \int d\gamma_1 d\gamma_2 \bar{q}(\gamma_1) f(\gamma_1, \gamma_2) p_{\gamma_1}^{\gamma_2} q(\gamma_2) |\Omega\rangle \quad (3.9)$$

Dabei bezeichnet $|\Omega\rangle$ den exakten Grundzustand für $g \neq 0$, d.h. es gilt

$$H |\Omega\rangle = P |\Omega\rangle = 0 \quad (3.10)$$

und die Wellenfunktion f (eine 2×2 Spinormatrix) muß so bestimmt werden, daß $|M\rangle$ Eigenzustand zu Energie und Impuls wird:

*) $|0;m\rangle$ bezeichnet hier und im Folgenden das Fockraum-Vakuum eines freien Dirac-Feldes der Masse m .

$$P|M\rangle = [P, M]|\Omega\rangle = K|M\rangle \quad (3.11a)$$

$$H|M\rangle = [H, M]|\Omega\rangle = \omega_K|M\rangle \quad (3.11b)$$

Mit Gl.(2.36) erhalten wir für den Kommutator von P und M

$$\begin{aligned} [P, M] &= \int dY_1 dY_2 \left\{ (i\partial_{Y_1} \bar{q}(Y_1)) f(Y_1, Y_2) P_{Y_1}^{Y_2} q(Y_2) + \bar{q}(Y_1) f(Y_1, Y_2) P_{Y_1}^{Y_2} (i\partial_{Y_2} q(Y_2)) \right. \\ &\quad \left. - ig \int_{Y_1}^{Y_2} dx \bar{q}(Y_1) f(Y_1, Y_2) P_{Y_1}^x (i\partial_x A_1(x)) P_x^{Y_2} q(Y_2) \right\} \\ &= \sum_{\Gamma} \int dY_1 dY_2 f_{\Gamma}(Y_1, Y_2) i(\partial_{Y_1} + \partial_{Y_2}) \bar{q}(Y_1) \Gamma P_{Y_1}^{Y_2} q(Y_2) \\ &= \int dY_1 dY_2 \bar{q}(Y_1) \left[-i(\partial_{Y_1} + \partial_{Y_2}) f(Y_1, Y_2) \right] P_{Y_1}^{Y_2} q(Y_2) \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei in der vorletzten Zeile die Summe über die vier linear unabhängigen Spinormatrizen Γ läuft. Wie zu erwarten war, ist Gl.(3.11a) genau dann erfüllt, wenn die Wellenfunktion als ebene Welle in der Schwerpunktkoordinate $(Y_1 + Y_2)/2$ gewählt wird

$$f(Y_1, Y_2) = e^{iK(Y_1 + Y_2)/2} \hat{f}_K(Y_1 - Y_2) \quad (3.13)$$

Als nächstes betrachten wir den Kommutator von H und M.

$$\begin{aligned} [H, M] &= \int dY_1 dY_2 \sum_{\Gamma} f_{\Gamma}(Y_1, Y_2) \left\{ \bar{q}(Y_1) (-i\overleftrightarrow{D}_{Y_1} \gamma_5 + m\gamma_0) \Gamma P_{Y_1}^{Y_2} q(Y_2) \right. \\ &\quad + \bar{q}(Y_1) \Gamma P_{Y_1}^{Y_2} (-i\overrightarrow{D}_{Y_2} - m\gamma_0) q(Y_2) \\ &\quad \left. + \bar{q}(Y_1) \Gamma \int_{Y_1}^{Y_2} dx P_{Y_1}^x (-gF_{01}(x)) P_x^{Y_2} q(Y_2) \right\} \\ &= \int dY_1 dY_2 \left\{ \bar{q}(Y_1) \left[(-i\overrightarrow{\partial}_{Y_1} \gamma_5 + m\gamma_0) f(Y_1, Y_2) + f(Y_1, Y_2) (-i\overleftarrow{\partial}_{Y_2} \gamma_5 - m\gamma_0) \right] P_{Y_1}^{Y_2} q(Y_2) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\Gamma} f_{\Gamma}(Y_1, Y_2) \bar{q}(Y_1) \Gamma \int_{Y_1}^{Y_2} dx P_{Y_1}^x (-gF_{01}(x)) P_x^{Y_2} q(Y_2) \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Während der Operatoranteil des ersten Terms, der die kinetische Energie der Quarks beschreibt, genau die Form des ursprünglichen Ansatzes hat, führt der Operatoreinschub im zweiten Term, der, wie wir sehen werden, die Coulombwechselwirkung und die Selbstenergie der Quarks enthält, von diesem Ansatz weg. Der Ansatz (3.9) ist damit im allgemeinen nicht hinreichend, vielmehr muß der String $P_{Y_1}^{Y_2}$ so modifiziert werden, daß solche Operatoreinschübe absorbiert werden können. Hiermit werden wir uns in Kapitel 5 ausführlich befassen.

Für schwache Kopplung ist der Ansatz (3.9) aber völlig ausreichend, wenn wir uns wie in der Coulombbeziehung auf den Quark-Antiquark-Teilraum beschränken. Hierzu muß der F_{01} -Einschub mittels des Gauss'schen Gesetzes durch j_0 ersetzt werden. Da in der temporalen Eichung das Gauss'sche Gesetz nur bei Anwendung auf physikalische Zustände (hier das Vakuum $|\Omega\rangle$) gilt, kommutieren wir zunächst F_{01} nach rechts und erhalten

$$\begin{aligned}
 & \bar{q}(Y_1) \Gamma \int_{Y_1}^{Y_2} dx P_{Y_1}^x (-g \frac{\lambda^a}{2} F_{01}^a(x)) P_x^{Y_2} q(Y_2) |\Omega\rangle \\
 &= -g \bar{q}(Y_1) \Gamma \left\{ \int_{Y_1}^{Y_2} dx P_{Y_1}^x \frac{\lambda^a}{2} [F_{01}^a(x), P_x^{Y_2}] q(Y_2) \right. \\
 & \quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} dx P_{Y_1}^x \frac{\lambda^a}{2} P_x^{Y_2} q(Y_2) F_{01}^a(x) \frac{d}{dx} \frac{1}{2} (|Y_1-x| - |Y_2-x|) \right\} |\Omega\rangle \quad (3.15) \\
 &= \bar{q}(Y_1) \Gamma \int_{Y_1}^{Y_2} dx P_{Y_1}^x \frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^a}{2} \frac{g^2}{2} \text{sgn}(Y_2-x) P_x^{Y_2} q(Y_2) |\Omega\rangle \\
 & \quad + g \bar{q}(Y_1) \Gamma \int_{-\infty}^{\infty} dx P_{Y_1}^x \frac{\lambda^a}{2} P_x^{Y_2} q(Y_2) \frac{1}{2} (|Y_1-x| - |Y_2-x|) (D_1 F_{01})^a(x) |\Omega\rangle \\
 &= G^2 \frac{1}{2} |Y_1 - Y_2| \bar{q}(Y_1) \Gamma P_{Y_1}^{Y_2} q(Y_2) |\Omega\rangle \\
 & \quad - g^2 \bar{q}(Y_1) \Gamma \int_{-\infty}^{\infty} dx P_{Y_1}^x \frac{\lambda^a}{2} P_x^{Y_2} q(Y_2) \frac{1}{2} (|Y_1-x| - |Y_2-x|) \bar{q}(x) \frac{\lambda^a}{2} \gamma_0 q(x) |\Omega\rangle
 \end{aligned}$$

In $[F_{01}^a(x), P_x^{Y_2}]$ taucht dabei der Ausdruck $\int_x^{Y_2} dz \delta(x-z)$ auf (vgl. Anhang B). Um die richtige Stärke des Coulombpotentials in (3.15) zu bekommen, setzen wir ihn gleich $\frac{1}{2} \text{sgn}(Y_2-x)$. Dies ist äquivalent zur Definition des Kommutators mittels symmetrischem Limes

$$[F_{01}^a(x), P_x^{Y_2}] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [F_{01}^a(x+\varepsilon), P_x^{Y_2}] = -\frac{g}{2} \operatorname{sgn}(Y_2-x) \frac{\lambda^a}{2} P_x^{Y_2} \quad (3.16)$$

Im folgenden werden wir für ähnliche Kommutatoren stets diese Definition benutzen.

Die Bedeutung der Terme in (3.15) ist klar: der erste Term produziert das Coulombpotential in der Schrödingergleichung, während der zweite Term die Selbstwechselwirkung der Quarks beschreibt. Um den Selbstenergieterm auf den Quark-Antiquark-Teilraum zu projizieren und um mit Gl.(3.8) vergleichen zu können, müssen wir nun einige Approximationen vornehmen und in den Impulsraum gehen.

Zunächst nehmen wir an, daß (zumindest im endlichen Kasten) das exakte Vakuum $|\Omega\rangle$ als Potenzreihe in g^2 geschrieben werden kann, symbolisch

$$|\Omega\rangle = |0;m\rangle + g^2 b^+ d^+ |0;m\rangle + O(g^4) \quad (3.17)$$

Da der Wechselwirkungsterm (3.15) bereits proportional g^2 ist, kann in (3.15) bis zur Ordnung g^2 $|\Omega\rangle = |0;m\rangle$ und der String $P_x^Y = 1$ gesetzt werden. Da der kinetische Term in (3.14) die Struktur des ursprünglichen Ansatzes hat, setzen wir hier und in $\omega_K M$ zur Vereinfachung der Rechnung ebenfalls $P_{y_1}^{Y_2} = 1$. Als nächstes wählt man $f(y_1, y_2)$ so, daß

$$\int dy_1 dy_2 \bar{q}(y_1) f(y_1, y_2) q(y_2) = \int dp \phi_K(p) b_i^+(p) d_i^+(K-p) \quad (3.18)$$

gilt. Dies wird durch

$$f(y_1, y_2) = e^{iK(y_1+y_2)/2} \int \frac{d\tau}{2\pi} e^{-i\tau(y_1-y_2)} \tilde{f}_K(\tau) \quad (3.19)$$

mit

$$\tilde{f}_K\left(\frac{K}{2}-\tau\right) = -\phi_K(\tau) \sqrt{\frac{m^2}{E_\tau E_{K-\tau}}} u(-\tau) \bar{v}(\tau-K) \quad (3.20)$$

erreicht. Für den im Quark-Antiquark-Teilraum liegenden Anteil von M

kann damit $|\Omega\rangle$ durch $|0;m\rangle$ ersetzt werden, und für den kinetischen Anteil von $[H,M]$ erhält man

$$\begin{aligned} & \int d\gamma_1 d\gamma_2 \bar{q}(\gamma_1) \left[(-i\vec{\partial}_{\gamma_1} \gamma_5 + m\gamma_0) f(\gamma_1, \gamma_2) + f(\gamma_1, \gamma_2) (-i\vec{\partial}_{\gamma_2} \gamma_5 - m\gamma_0) \right] q(\gamma_2) \\ & \quad (3.21) \\ & = \int d\mathbf{p} \phi_K(\mathbf{p}) (E_{K-\mathbf{p}} + E_{\mathbf{p}}) b_i^+(\mathbf{p}) d_i^+(\mathbf{K}-\mathbf{p}) \end{aligned}$$

Den im $\bar{q}q$ -Teilraum liegenden Anteil des Wechselwirkungsterms erhält man, indem man nach dem Wickschen Theorem im Selbstenergieterm $\bar{q}(y_1)$ mit $q(x)$ bzw. $q(y_2)$ mit $\bar{q}(x)$ kontrahiert:

$$\begin{aligned} & \int d\gamma_1 d\gamma_2 \bar{q}(\gamma_1) f(\gamma_1, \gamma_2) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx p_{\gamma_1}^x (-g F_{01}(x)) p_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) |\Omega\rangle / \bar{q}q \\ & \approx N_m \int d\gamma_1 d\gamma_2 \left\{ \frac{G^2}{2} |\gamma_1 - \gamma_2| \bar{q}(\gamma_1) f(\gamma_1, \gamma_2) q(\gamma_2) \right. \\ & \quad (3.22) \\ & \quad + \int dx \frac{G^2}{2} (|\gamma_2 - x| - |\gamma_1 - x|) \left[\bar{q}(\gamma_1) f(\gamma_1, \gamma_2) \langle q(\gamma_2) \bar{q}(x) \rangle \gamma_0 q(x) \right. \\ & \quad \left. \left. + \bar{q}(x) \gamma_0 (\langle q(x) \bar{q}(\gamma_1) \rangle - \gamma_0 \delta(x - \gamma_1)) f(\gamma_1, \gamma_2) q(\gamma_2) \right] \right\} |0; m\rangle \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \langle q(x) \bar{q}(y) \rangle &= \langle 0; m | q(x) \bar{q}(y) | 0; m \rangle \\ &= \int \frac{d\mathbf{p}}{2\pi} \frac{m}{E_p} u(\mathbf{p}) \bar{u}(\mathbf{p}) e^{ip(x-y)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Zum Vergleich mit (3.8) muß (3.22) nun in den Impulsraum übertragen werden. Unter Ausnutzung der Hauptwertintegraldarstellung des Coulombpotentials

$$\frac{1}{2} |x| = \int \frac{dk}{2\pi} e^{ikx} \frac{-1}{k^2} \quad (3.24)$$

sowie der Fourierdarstellungen von q und f ((3.4) und (3.20)) erhalten wir nach kurzer Rechnung

$$N_m \int dY_1 dY_2 \frac{G^2}{2} |Y_1 - Y_2| \bar{q}(Y_1) f(Y_1, Y_2) q(Y_2) |0; m\rangle \quad (3.25)$$

$$= \frac{G^2}{2\pi} \int dp b_i^\dagger(p) d_i^\dagger(K-p) |0; m\rangle \left\{ d\tau \frac{\phi_K(\tau)}{(p-\tau)^2} \sqrt{\frac{m^2}{E_p E_\tau}} \bar{u}(p) u(-\tau) \sqrt{\frac{m^2}{E_{K-\tau} E_{K-p}}} \bar{v}(\tau-K) v(K-p) \right\}$$

Nun gilt

$$\sqrt{\frac{m^2}{E_p E_\tau}} \bar{u}(p) u(-\tau) = \frac{m}{2\sqrt{E_p E_\tau}} \frac{E_p + p + E_\tau - \tau}{\sqrt{(E_p + p)(E_\tau - \tau)}} = \left[\frac{E_p E_\tau + p\tau + m^2}{2 E_p E_\tau} \right]^{1/2} \quad (3.26)$$

und analog

$$\sqrt{\frac{m^2}{E_{K-\tau} E_{K-p}}} \bar{v}(\tau-K) v(K-p) = - \left[\frac{E_{K-\tau} E_{K-p} + (K-\tau)(K-p) + m^2}{2 E_{K-\tau} E_{K-p}} \right]^{1/2} \quad (3.27)$$

und damit kann der Coulombterm in (3.22) direkt mit dem Integralterm in (3.8) identifiziert werden.

Eine analoge aber etwas langwierige Rechnung ergibt für den verbleibenden Selbstenergieterm in (3.22)

$$\left\{ dp b_i^\dagger(p) d_i^\dagger(K-p) |0; m\rangle \left\{ -\phi_K(p) \frac{G^2}{2\pi} \left(\frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_{K-p}} \right) \right\} \right\} \quad (3.28)$$

Faßt man alle Terme zusammen, so reduziert sich die Eigenwertgleichung (3.11b) im $\bar{q}q$ -Teilraum auf

$$\int dp b_i^\dagger(p) d_i^\dagger(K-p) |0; m\rangle \phi_K(p) \omega_K =$$

$$\int dp b_i^\dagger(p) d_i^\dagger(K-p) |0; m\rangle \left\{ \phi_K(p) \left[E_p + E_{K-p} - \frac{G^2}{2\pi} \left(\frac{1}{E_p} + \frac{1}{E_{K-p}} \right) \right] \right\} \quad (3.29)$$

$$- \frac{G^2}{2\pi} \left\{ d\tau \frac{\phi_K(\tau)}{(p-\tau)^2} \left[\frac{E_p E_\tau + p\tau + m^2}{2 E_p E_\tau} \right]^{1/2} \left[\frac{E_{K-\tau} E_{K-p} + (K-\tau)(K-p) + m^2}{2 E_{K-\tau} E_{K-p}} \right]^{1/2} \right\}$$

und damit auf (3.8). In der temporalen Eichung und in der Coulombeichung erhält man bis zur Ordnung g^2 also die gleiche Schrödingergleichung für mesonische Bindungszustände. Numerische Methoden zur Lösung der Integralgleichung, die Abhängigkeit der Massen der niedrigsten Bindungszustände

von m^2/G^2 , sowie eine ausführliche Diskussion der Lorentzinvarianz des Spektrums findet man bei Hanson, Peccei und Prasad^(15,22), so daß wir die Integralgleichung (3.8) hier nicht weiter betrachten müssen.

Stattdessen soll nun eine Differentialgleichung für die Ortsraum-Wellenfunktion $f(y_1, y_2)$ abgeleitet werden, die bis auf Terme der Ordnung G^4 zu (3.8) äquivalent ist und die, wie wir sehen werden, analytisch lösbar ist.

Aus der Impulsraum-Darstellung (3.28) des Selbstenergieterms in (3.22) lesen wir wegen

$$\sqrt{p^2 + m^2 - G^2/\pi} = E_p - \frac{G^2}{2\pi} \frac{1}{E_p} + O(G^4)$$

ab, daß die Selbstenergie der Quarks in der kinetischen Energie (3.21) absorbiert werden kann, indem man die nackte Quarkmasse m durch

$$\mu = \sqrt{m^2 - G^2/\pi} \quad (3.30)$$

ersetzt. Bis auf Terme der Ordnung G^4 erhält man in der temporalen Eichung damit die Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} H|M\rangle &= \int dy_1 dy_2 \bar{q}(y_1) \omega_K f(y_1, y_2) P_{y_1}^{y_2} q(y_2) |\Omega\rangle \\ &= \int dy_1 dy_2 \bar{q}(y_1) \left\{ (-i\vec{\partial}_{y_1} \gamma_5 + \mu \gamma_0) f(y_1, y_2) \right. \\ &\quad \left. + f(y_1, y_2) (-i\vec{\partial}_{y_2} \gamma_5 - \mu \gamma_0) + \frac{G^2}{2} |y_1 - y_2| f(y_1, y_2) \right\} P_{y_1}^{y_2} q(y_2) |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (3.31)$$

die äquivalent zur folgenden Eigenwertgleichung für $\hat{f}_K(y_1 - y_2)$ ist

$$\omega_K \hat{f}_K(x) = \left[\frac{\kappa}{2} \gamma_5 + \mu \gamma_0, \hat{f}_K(x) \right] - i \left\{ \gamma_5, \frac{d}{dx} \hat{f}_K(x) \right\} + \frac{G^2}{2} |x| \hat{f}_K(x) \quad (3.32)$$

Diese Gleichung soll nun gelöst werden. Dazu schreiben wir $\hat{f}_K$ zunächst als Linearkombination der vier linear unabhängigen Spinormatrizen

$$\hat{f}_K = \gamma_0 f_0 + \gamma_1 f_1 + \gamma_5 f_2 + \gamma_3 f_3 \quad (3.33)$$

und erhalten anstelle von (3.32) das System

$$(\omega_K - V) \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \frac{K}{2} \begin{pmatrix} -2f_1 \\ -2f_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2f_2 \\ 2f_1 \\ 0 \end{pmatrix} - i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2f_3 \\ 2f_2 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

mit $V(x) = \frac{G^2}{2} |x|$. Mittels der ersten beiden Gleichungen findet man

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{-2\mu K}{(\omega_K - V)^2 - K^2} f_2 \\ f_1 &= \frac{2\mu (\omega_K - V)}{(\omega_K - V)^2 - K^2} f_2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Einsetzen von f_1 in die dritte Gleichung liefert für f_3 und f_4 folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\begin{aligned} 2i \frac{d}{dx} f_2 + (\omega_K - V) f_3 &= 0 \\ 2i \frac{d}{dx} f_3 + (\omega_K - V) \left(1 + \frac{4\mu^2}{K^2 - (\omega_K - V)^2} \right) f_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.36a, b)$$

Durch Ableiten von (3.36a) nach x kann man f_3 eliminieren. Da $\frac{d}{dx} V(x)$ bei $x = 0$ eine Sprungstelle hat, behandeln wir die beiden Bereiche $x > 0$ und $x < 0$ zunächst getrennt voneinander. Anschließend müssen die beiden Äste $f_{2\sigma}$ und $f_{3\sigma}$ von f_2 und f_3 ($\sigma = \text{sgn } x$) bei $x = 0$ stetig differenzierbar aneinandergefügt werden, und wie wir sehen werden, führt diese Randbedingung zur Quantisierung von ω_K .

Zunächst führen wir als neue Variable

$$z = -\text{sgn } x \sqrt{\frac{2}{G^2}} (\omega_K - V(x)) = \sqrt{\frac{G^2}{2}} x - \text{sgn } x \sqrt{\frac{2}{G^2}} \omega_K \quad (3.37)$$

ein, differenzieren (3.36a) nach z , eliminieren $f_{3\sigma}$ und erhalten für $f_{2\sigma}(z)$ die Gleichung

$$f_{2\sigma}'' - \frac{1}{z} f_{2\sigma}' + \frac{z^2}{4} \left(1 - \frac{2\mu^2/G^2}{\frac{z^2}{4} - \frac{K^2}{2G^2}} \right) f_{2\sigma} = 0 \quad (3.38)$$

Aus der Struktur der Gleichung ist klar, daß f_2 eine Funktion von z^2 sein muß. Wir setzen daher

$$f_{2\sigma}(z) = w_\sigma\left(\frac{z^2}{4} - \frac{K^2}{2G^2}\right) = w_\sigma(s(z)) \quad (3.39)$$

und erhalten wegen $f_{2\sigma}'' - \frac{1}{z} f_{2\sigma}' = \frac{z^2}{4} w_\sigma''$ für $w_\sigma(s)$

$$w_\sigma''(s) + \left(1 - \frac{2\mu^2/G^2}{s}\right) w_\sigma(s) = 0 \quad (3.40)$$

Gleichung (3.40) ist die Coulomb-Wellengleichung für den Spezialfall Drehimpuls $L = 0$, wie sie im Buch von Abramowitz und Stegun⁽²³⁾ diskutiert wird, und wird durch die Coulomb-Wellenfunktionen $F_0(\eta, s)$ und $G_0(\eta, s)$ mit $\eta = \mu^2/G^2$ gelöst. Als Lösung von (3.34) ist aber nur F_0 akzeptabel: wegen $\omega_K > 0$ wird der Wert $s(x)=0$ für ein endliches x angenommen. Dort verhält sich f_1 wie $\frac{w_\sigma(s)}{s}$, und aus der Forderung, daß die Fouriertransformierte $\tilde{f}_K(p)$ und damit $\phi_K(p)$ gemäß (3.19) und (3.20) im eigentlichen Sinne existieren, folgt, daß $\frac{w_\sigma(s)}{s}$ bei $s=0$ integrierbar sein muß^{*)}. Da nur $F_0(\eta, s)$ bei $s=0$ verschwindet, erhalten wir als Lösung von (3.40)

$$\begin{aligned} w_\sigma(s) &= c_\sigma F_0(\eta, s) \\ &= c_\sigma \left[\frac{2\pi\eta}{e^{2\pi\eta} - 1} \right]^{1/2} s e^{-is} {}_1F_1(1 - i\eta; 2; 2is) \end{aligned} \quad (3.41)$$

wobei ${}_1F_1$ die in ganz $\mathbb{C}$ analytische konfluente hypergeometrische Funktion bezeichnet.

Bevor wir nun die Randbedingungen bei $x = 0$ betrachten, müssen wir kurz auf die Paritäts- und Ladungskonjugationseigenschaften der Zustände in (3.9) eingehen. Definiert man analog zum vierdimensionalen Fall⁽¹⁶⁾

) $w_\sigma(0) \neq 0$ und die daraus folgende Singularität von $\hat{f}$ bei $s = 0$ führt für große p zu $\phi_K(p) \sim \frac{1}{p}$. Der Erwartungswert der Energie enthält damit im Impulsraum einen Anteil $\int dp \phi_K^(p) E_p \phi_K(p)$, der logarithmisch divergiert und damit signalisiert, daß der Hermitizitätsbereich des Hamiltonoperators verlassen wurde.

$$\begin{aligned} P q(x, t) P^{-1} &= \gamma_0 q(-x, t) \\ C q(x, t) C^{-1} &= \gamma_1 \bar{q}^T(x, t) \end{aligned} \quad (3.42)$$

so folgt aus

$$\begin{aligned} P \bar{q}(\gamma_1) \Gamma q(\gamma_2) P^{-1} &= \bar{q}(-\gamma_1) \gamma_0 \Gamma \gamma_0 q(-\gamma_2) \\ C \bar{q}(\gamma_1) \Gamma q(\gamma_2) C^{-1} &= -\bar{q}(\gamma_2) \gamma_1 \Gamma^T \gamma_1 q(\gamma_1) \end{aligned} \quad (3.43)$$

daß der Zustand

$$|M\rangle = \int d\gamma_1 d\gamma_2 e^{i \frac{K}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)} \bar{q}(\gamma_1) \hat{f}_K(\gamma_1 - \gamma_2) P_{\gamma_1}^{\gamma_2} q(\gamma_2) |\Omega\rangle$$

genau dann ein Eigenzustand von Parität und Ladungskonjugation mit Eigenwerten π und ξ ist (bis auf die Ersetzung $K \rightarrow -K$ unter Paritätstransformationen), wenn die Komponenten von $\hat{f}_K$ sich unter P wie

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \pi f_0(-x) \\ f_1(x) &\rightarrow -\pi f_1(-x) \\ f_2(x) &\rightarrow -\pi f_2(-x) \\ f_3(x) &\rightarrow \pi f_3(-x) \end{aligned} \quad (3.44)$$

und unter C wie

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow -\xi f_0(-x) \\ f_1(x) &\rightarrow -\xi f_1(-x) \\ f_2(x) &\rightarrow -\xi f_2(-x) \\ f_3(x) &\rightarrow \xi f_3(-x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

transformieren. Aus (3.35) und (3.36a) folgt nun das "richtige" Transformationsverhalten für f_0, f_1 und f_3 aus dem für f_2 , so daß wir uns im folgenden auf die Betrachtung von f_2 beschränken können.

Mit (3.39) und (3.41) erhalten wir für $x \neq 0$

$$f_{2\sigma}(x) = c_{\sigma} F_0\left(\eta, \frac{1}{2G^2} \left[\left(\omega_K - \frac{G^2}{2}|x|\right)^2 - K^2\right]\right) = c_{\sigma} F_0(\eta, s(x)) \quad (3.47)$$

$$\frac{d}{dx} f_{2\sigma}(x) = -c_{\sigma} \operatorname{sgn} x \frac{1}{2} \left(\omega_K - \frac{G^2}{2}|x|\right) F_0'(\eta, s(x))$$

Der Vergleich mit (3.44) und (3.45) liefert sofort, daß $|M\rangle$ genau dann ein Eigenzustand von P und C mit Eigenwerten π und ζ ist, wenn

$$c_+ = -\pi c_- = -\zeta c_- \quad (3.48)$$

gilt. Insbesondere sind also alle Eigenzustände CP-gerade.

Damit nun $f_2(x)$ und $\frac{d}{dx} f_2(x)$ bis $x = 0$ stetig sind, muß entweder F_0 (für $c_+ = -c_-$) oder F_0' (für $c_+ = c_-$) bei $x = 0$ verschwinden. Bezeichnet man die positiven Nullstellen von $F_0(\eta, s)$ bzw. $F_0'(\eta, s)$ mit s_n , so erhält man hieraus für ω_K die Quantisierungsbedingung

$$\omega_{K,n}^2 = 2G^2 s_n + K^2 \quad (3.49)$$

und damit ein lorentzkovariantes Spektrum für die Energien der mesonischen Bindungszustände. Deren Ruhemassen M_n sind gegeben durch

$$M_n = G \sqrt{2 s_n} \quad (3.50)$$

mit

$$F_0(\eta, s_n) = 0 \quad \text{für} \quad \pi = +1 \quad (3.51)$$

$$F_0'(\eta, s_n) = 0 \quad \text{für} \quad \pi = -1$$

Um die Mesonmassen zu bestimmen, sollen die Nullstellen von F_0 und F_0' nun näher betrachtet werden.

Zunächst folgt aus der Coulomb-Wellengleichung (3.40), daß $F_0(\eta, s)$ und $F_0''(\eta, s)$ für $0 < s < 2\eta$ gleiches Vorzeichen haben. Wegen $F_0(\eta, 0) = 0$, $F_0'(\eta, 0) > 0$

ist $F_0(\eta, s)$ im Intervall $s \in (0, 2\eta)$ also positiv und konvex, und damit ist der Grundzustand des Mesonspektrums durch die niedrigste Nullstelle s_0 von $F_0'(\eta, s)$ gegeben mit $s_0 > 2\eta$. Der Grundzustand hat folglich ungerade Parität und Ruhemasse $M_0 = G\sqrt{2s_0} > 2\mu$, d.h. er ist schwerer als die doppelte Quarkmasse. Für $s > 2\eta$ fallen gemäß (3.40) die Nullstellen von F_0 und F_0'' zusammen, und damit liegt zwischen zwei Nullstellen von F_0' immer genau eine Nullstelle von F_0 und umgekehrt. Mesonzustände mit gerader und ungerader Parität wechseln sich daher im Spektrum ab, und wie wir im Anschluß an (3.48) schon bemerkt haben, sind alle Zustände CP-gerade.

Dieses qualitative Verhalten des Spektrums entspricht genau dem perturbativen Limes des massiven Schwinger Modells, wie es von Coleman⁽²¹⁾ diskutiert worden ist. Dies war natürlich zu erwarten, da das massive Schwinger Modell in unserer Diskussion als Spezialfall mit $G^2 = \frac{g^2}{2} = e^2$ enthalten ist.

Um die Nullstellen von F_0 und F_0' tatsächlich zu bestimmen, genügt es, asymptotische Entwicklungen für $\eta = \mu^2/G^2 \gg 1$ zu betrachten, da Gl. (3.32) nur für diesen Bereich abgeleitet worden war. Für $s \approx 2\eta$ gilt nun⁽²³⁾

$$\begin{aligned} F_0(\eta, s) &= \sqrt{\pi}(2\eta)^{1/6} \text{Ai}\left(\frac{2\eta-s}{(2\eta)^{1/3}}\right) \left(1 + \sigma\left(\frac{2\eta-s}{2\eta}\right)\right) \\ F_0'(\eta, s) &= -\sqrt{\pi}(2\eta)^{-1/6} \text{Ai}'\left(\frac{2\eta-s}{(2\eta)^{1/3}}\right) \left(1 + \sigma\left(\frac{2\eta-s}{2\eta}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Bezeichnet man mit $-a_n$ die Nullstellen der Airy-Funktion und ihrer Ableitung, so folgt^{*)}

$$M_n^2 = 4\mu^2 \left[1 + a_n \left(\frac{G^2}{2\mu^2}\right)^{2/3} + \sigma\left(a_n \left(\frac{G^2}{2\mu^2}\right)^{4/3}\right) \right] \quad (3.53)$$

*) Dies ist genau das Spektrum, das sich für ein Teilchen der reduzierten Masse $m_r = \frac{\mu}{2}$ im Coulombpotential $G^2/2 |x|$ in der nichtrelativistischen Schrödingergleichung ergibt. Dies bestätigt nachträglich die Integrabilitätsbedingung an $\hat{f}(x)$, die zu (3.41) führte.

mit $\alpha_0 = 1.01879$ für den mesonischen Grundzustand und $\alpha_1 = 2.33811$ für den ersten angeregten Zustand⁽²³⁾.

Das Spektrum der hochangeregten Mesonen erhält man aus den asymptotischen Ausdrücken für $s \gg 2\eta$

$$\begin{aligned} F_0(\eta, s) &= \sin \left[\frac{\pi}{4} + s - \eta - \eta \ln \frac{2s}{\eta} \right] (1 + \sigma(\frac{2\eta}{s})) \\ F'_0(\eta, s) &= \cos \left[\frac{\pi}{4} + s - \eta - \eta \ln \frac{2s}{\eta} \right] (1 + \sigma(\frac{2\eta}{s})) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Im Gültigkeitsbereich der Entwicklung ist der Logarithmus klein gegen s/η und damit erhalten wir für $n \gg \eta \gg 1$, $n \in \mathbb{N}$

$$M_n^2 \approx 2\mu^2 + \pi G^2(n + \frac{1}{2}) + 2\mu^2 \ln \left[2 + \pi \frac{G^2}{\mu^2} (n + \frac{1}{2}) \right] \quad (3.55)$$

Auch für Werte von s zwischen den Gültigkeitsbereichen von (3.52) und (3.54) kann man asymptotische Entwicklungen angeben. Da uns das Mesonspektrum im Zwischenbereich im folgenden nicht weiter interessieren wird, wollen wir jedoch hier nicht darauf eingehen.

3.2. Quantisierung in Lichtkegelkoordinaten und die 't Hooft Gleichung

Das Spektrum (3.55) für die Massen der hochangeregten Mesonen hat bereits 't Hooft in seiner Untersuchung von QCD_2 im Limes $N \rightarrow \infty$ angegeben⁽¹⁴⁾. Mittels graphischer Methoden findet 't Hooft eine Bethe-Salpeter-Gleichung für die Mesonen, die eng mit der störungstheoretischen Gleichung (3.8) zusammenhängt⁽¹⁹⁾. Diese 't Hooft Gleichung kann auch im Hamiltonschen Formalismus gewonnen werden, und diese Art der Ableitung soll nun skizziert werden, da einige Erweiterungen der Methode noch für den Fall masseloser Quarks benötigt werden. Wir folgen dabei eng der Darstellung und der Schreibweise von Buchmüller, Love und Peccei⁽²⁵⁾.

Zunächst transformiert man die Feldgleichungen (2.2) und (2.4) auf Lichtkegelkoordinaten $x^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^1)$, indem man alle Zweiervektoren (B^0, B^1) durch $(B^+, B^-) = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^0 + B^1, B^0 - B^1)$ ersetzt (vgl. Anhang A). x^- kann als neue

Ortskoordinate aufgefaßt werden, die bis auf einen (unendlichen) Normierungsfaktor die Ortskoordinate $x'^1 = \frac{x^1 - \beta x^0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ eines auf Geschwindigkeit $\beta = +1$ geboosteten Systems darstellt⁽²⁶⁾, und der Generator von x^+ -Transformationen, $P_+ = P^-$, übernimmt die Rolle des Hamiltonoperators. In der Lichtkegelgleichung $A^{+a} = 0$ lauten nun die Feldgleichungen

$$\partial_+ \partial_- A_+^a + g f^{abc} A_+^b \partial_- A_+^c + g \bar{q} \gamma^- \frac{\lambda^a}{2} q = 0$$

$$- \partial_-^2 A_+^a + g \bar{q} \gamma^+ \frac{\lambda^a}{2} q = 0$$

(3.56a-d)

$$2i \partial_- q_- = m \gamma^+ q_+$$

$$2i \partial_+ q_+ = m \gamma^- q_- - 2g A_+^a \frac{\lambda^a}{2} q_+$$

mit

$$q_{\pm} = \frac{1}{2} \gamma^{\mp} \gamma^{\pm} q$$

(3.57)

Mit Hilfe des Gauss'schen Gesetzes (3.56b) kann das Eichfeld A_+ vollständig eliminiert werden

$$A_+^a(x^+, x^-) = g \int d\zeta \frac{1}{2} |x^- - \zeta| J^{a+}(x^+, \zeta) \quad (3.58)$$

mit

$$J^{a+} = \bar{q} \gamma^+ \frac{\lambda^a}{2} q = \sqrt{2} q_+^{\dagger} \frac{\lambda^a}{2} q_+ \quad (3.59)$$

und ebenso zeigt (3.56c), daß nur q_+ als unabhängige dynamische Variable angesehen werden kann, während

$$q_-(x^+, x^-) = \frac{m}{2i \partial_-} \gamma^+ q_+(x^+, x^-) = \frac{m}{2i} \gamma^+ \int d\zeta \frac{1}{2} \text{sgn}(x^- - \zeta) q_+(x^+, \zeta) \quad (3.60)$$

gilt. Auch der "Hamiltonoperator" P_+ kann damit allein durch q_+ ausgedrückt werden. Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}
 P_+ &= \int dx^- \left\{ i \bar{q}(x^+, x^-) \gamma^+ \partial_+ q(x^+, x^-) - \frac{1}{2} (\partial_- A_+^a(x^+, x^-))^2 \right\} \\
 &= \frac{1}{12} \int dx^- q_+^\dagger(x) \frac{m^2}{i \partial_-} q_+(x) - \frac{g^2}{4} \int dx^- d\gamma^- \left[\gamma^+_{(x^+, x^-)} |x^- - \gamma^-| \gamma^+_{(x^+, \gamma^-)} \right] \quad (3.61)
 \end{aligned}$$

Wie bei der Behandlung der Coulomb-Eichung im letzten Abschnitt entwickelt man $q_+(x^+, x^-)$ für festes $x^+ = 0$ in ebene Wellen

$$\begin{aligned}
 q_{+j}(x^+ = 0, x^-) &= \\
 \frac{1}{2^{1/4}} \int_0^\infty \frac{dp_-}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-i p_- x^-} b_j(p_-) + e^{i p_- x^-} d_j^\dagger(p_-) \right] \quad (3.62)
 \end{aligned}$$

und verlangt für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $b_j^{(+)}(p_-), d_j^{(+)}(p_-)$ kanonische Antivertauschungsrelationen ^(25,26)

$$\{b_i(p_-), b_j^\dagger(q_-)\} = \{d_i(p_-), d_j^\dagger(q_-)\} = \delta_{ij} \delta(p_- - q_-) \quad (3.63)$$

Der quantenmechanische Operator P_+ wird nun durch Subtraktion des Vakuumerwartungswertes von (3.61) definiert, wobei das Vakuum $|0\rangle$ durch

$$b_i(p_-) |0\rangle = d_i(p_-) |0\rangle = 0 \quad (3.64)$$

gegeben ist. Das so definierte Vakuum hat die bemerkenswerte Eigenschaft, ein exakter Eigenzustand von P_+ mit Eigenwert 0 zu sein. Dies ist eine bei Lichtkegelquantisierung allgemein auftretende Erscheinung: da es gemäß (3.62) nur Erzeugungsoperatoren mit positivem p_- gibt, können in P_+ nur Terme mit mindestens je einem Erzeugungs- und einem Vernichtungsoperator vorkommen, wenn $[P_+, P_-] = 0$ erfüllt sein soll. In der normalgeordneten Form von P_+ sorgt dann der Vernichtungsoperator für $P_+ |0\rangle = 0$.

Wie im störungstheoretischen Fall definiert man nun mesonische Bindungszustände als Masseeigenzustände, die von einem Quark-Antiquark-Paar aus dem Vakuum erzeugt werden

$$|M; p_- \rangle = \int_0^1 dx \, b_i^\dagger((1-x)p_-) d_i^\dagger(x p_-) \varphi(x) |0\rangle \quad (3.65)$$

Da in Lichtkegelkoordinaten die Ruhemasse M durch

$$M^2 = 2 P_+ P_- \quad (3.66)$$

gegeben ist, ergibt sich die Masse M des Bindungszustandes sofort aus der Eigenwertgleichung für P_+ , die bis auf den Masseterm aus der Arbeit von Buchmüller, Love und Peccei⁽²⁵⁾ übernommen werden kann

$$\begin{aligned} M^2 |M; p_- \rangle &= 2 p_- P_+ |M; p_- \rangle \\ &= \int_0^1 dx \, b_i^+ ((1-x)p_-) d_i^+ (xp_-) |0\rangle \frac{g^2}{\pi} \frac{N^2-1}{2N} \left\{ \left(\frac{R-1}{x} + \frac{R-1}{1-x} \right) \varphi(x) - \int_0^1 d\gamma \frac{\varphi(\gamma)}{(x-\gamma)^2} \right\} \\ &\quad - \frac{g^2}{\pi} p_- \int_0^1 \frac{d\gamma}{\gamma^2} \int_0^\gamma dz \int_\gamma^1 dx [\varphi(x) - \varphi(x-\gamma)] \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \frac{\lambda_{mn}^a}{2} \\ &\quad b_i^+ ((1-x)p_-) d_j^+ ((x-\gamma)p_-) b_m^+ (zp_-) d_n^+ ((\gamma-z)p_-) |0\rangle \end{aligned} \quad (3.67)$$

mit

$$R = \frac{\pi m^2}{g^2} \frac{2N}{N^2-1} = \frac{\pi m^2}{G^2} \quad (3.68)$$

In (3.67) ist der $(b^+ d^+)^2$ -Term um einen Faktor $\frac{1}{N}$ gegenüber dem $b^+ d^+$ Term unterdrückt, und kann damit im Grenzfall $N \rightarrow \infty$ vernachlässigt werden^{*)}. Für $N \rightarrow \infty$ wird (3.67) damit lösbar und reduziert sich auf die 't Hooft Gleichung für die Wellenfunktion φ ⁽¹⁴⁾

$$\frac{\pi M^2}{G^2} \varphi(x) = (R-1) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) \varphi(x) - \int_0^1 d\gamma \frac{\varphi(\gamma)}{(x-\gamma)^2} \quad (3.69)$$

Damit der Integraloperator auf der rechten Seite von (3.69) hermitesch ist, muß $\varphi(x)$ für $R \neq 0$ bei $x = 0$ und $x = 1$ verschwinden⁽¹⁴⁾. Diese Randbedingung führt zur Quantisierung der Masseeigenwerte M . Numerische Resultate für diverse Quarkmassen m findet man bei 't Hooft⁽¹⁴⁾ und in⁽²⁵⁾.

Für das Spektrum der hochangeregten Zustände gibt 't Hooft die Formel

*) Die wie $1/N$ verschwindende Amplitude für Paarerzeugung ist ein allgemeines Phänomen von QCD im "large N limit", auch für vier Dimensionen⁽²⁷⁾.

$$M_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi G^2 n + 2 \left(m^2 - \frac{G^2}{\pi} \right) \ln n + \text{const.} \quad (3.70)$$

an, die qualitativ mit dem störungstheoretischen Spektrum (3.55) übereinstimmt.

Diese Übereinstimmung ist keineswegs zufällig. Tatsächlich kann man die 't Hooft Gleichung aus der Integralgleichung (3.8) ableiten, wie Bars und Green gezeigt haben⁽¹⁹⁾. Wie oben schon erwähnt, können die Lichtkegelkoordinaten als Grenzfall eines sehr schnell nach rechts bewegten Systems verstanden werden. Formal erhält man dieses System als Ruhesystem für die durch (3.8) beschriebenen Mesonen, indem man für deren Impuls K den Limes $K \rightarrow \infty$ betrachtet. Dazu skaliert man zunächst die Impulse $p = Kx$ und $r = Ky$, setzt $\phi_K(p) = \phi_K(Kx) = \varphi(x)$, $\omega_K = \sqrt{K^2 + M^2}$ und entwickelt (3.8) für $0 \neq x \neq 1$ bis zur Ordnung $\frac{1}{K}$. Da das Integral wie $\frac{1}{K}$ verschwindet, ist der führende Term

$$K \varphi(x) = K (|x| + |1-x|) \varphi(x) \quad (3.71)$$

und daraus folgt, daß $\varphi(x)$ für $x < 0$ und $x > 1$ verschwindet. Der $\frac{1}{K}$ -Term lautet nun

$$\frac{M^2}{2K} \varphi(x) = \frac{m^2 - G^2/\pi}{2K} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) \varphi(x) - \frac{G^2}{2K\pi} \int dy \frac{\varphi(y)}{(x-y)^2} \quad (3.72)$$

und ist damit äquivalent zur 't Hooft Gleichung (3.69). Allerdings ergeben sich aus dieser Ableitung Schwierigkeiten für die Randbedingungen an $\varphi(x)$: der wie $\frac{1}{x}$ divergente Masseterm in (3.72) stammt aus der Entwicklung von $\sqrt{p^2 + m^2} = \sqrt{(Kx)^2 + m^2} \approx |Kx| + \frac{m^2}{2|Kx|}$ und wird daher für $x \rightarrow 0$ ungültig. Die Randbedingung $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ an die Lösung der 't Hooft Gleichung ist daher mit Vorsicht zu betrachten⁽¹⁴⁾, denn es ist z.B. nicht klar, ob sie im störungstheoretischen Bereich mit (3.8) verträglich ist.

Für den Fall masseloser Quarks, d.h. $R = 0$ entfällt diese Randbedingung als Hermitizitätsbedingung an den Operator auf der rechten Seite von (3.69), und für diesen Fall hat 't Hooft den exakten Eigenzustand

$$\varphi(x) = \theta(x(1-x)) \quad (3.73)$$

mit Eigenwert 0 gefunden. Interessanterweise ist dieser masselose Zustand ein exakter Eigenzustand von (3.67) auch für endliches N , da der $(b^+d^+)^2$ Term in (3.67) nur die Differenz $\varphi(x) - \varphi(x-y)$ enthält, die für $\varphi = \text{const.}$ identisch verschwindet⁽²⁵⁾. Mit diesem masselosen Zustand werden wir uns noch ausführlich beschäftigen.

3.3. Bosonisierung und starke Kopplung

Bevor wir uns ganz der masselosen Theorie zuwenden, ist es notwendig, noch kurz den Bereich starker Kopplung $0 < m^2 \ll g^2$ zu betrachten, um den Grenzübergang $m \rightarrow 0$ aufzuhellen. Dabei werden wir uns im wesentlichen an die Arbeiten von Baluni⁽²⁸⁾ und Steinhardt⁽²⁹⁾ halten. Die grundlegende Idee ist dabei, die diagonalen Farbströme der Quarks durch Bosefelder so zu ersetzen, daß die Kommutatorrelationen (2.32) erfüllt bleiben, und anschließend die Theorie allein durch die Bosefelder auszudrücken. Von anderen zweidimensionalen Modellen her weiß man, daß ein stark gekoppeltes Fermifeld im allgemeinen einem schwach gekoppelten Bosefeld entspricht und umgekehrt. Dies gilt z.B. für das Paar 'massives Thirring Modell Sinus-Gordon-Gleichung'⁽¹⁰⁾ und für das (massive) Schwinger Modell und seine bosonisierte Form⁽²¹⁾, und trifft in eingeschränkter Form auch auf die QCD₂ zu.

Um QCD₂ zu bosonisieren, arbeitet man am besten in der von Baluni vorgeschlagenen Eichung⁽²⁸⁾

$$\begin{aligned} (F_{01})_{ij} &= 0 & i \neq j \\ (A_1)_{ii} &= 0 & i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.74)$$

wobei i, j die Indizes der $N \times N$ Farbmatrizen sind

$$(F_{01})_{ij} = F_{01}^a \frac{\lambda^a}{2} ij \quad (3.75)$$

Die diagonalen Farbströme

$$j_i^\mu = \bar{q}_i \gamma^\mu q_i = \lambda_{ii}^a j^{\mu a} + \frac{1}{N} \bar{j}^\mu \quad (3.76)$$

werden nun durch skalare Felder ϕ_i und deren kanonisch konjugierte Impulse π_i ersetzt⁽³⁰⁾

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} j_{0i} &= \partial_x \phi_i \\ \sqrt{\pi} j_{1i} &= \pi_i \end{aligned} \quad (3.77)$$

wobei der Koeffizient $\sqrt{\pi}$ die Konsistenz mit den Stromkommutatoren (2.32) garantiert. Die anderen gleichzeitigen Kommutatoren von Quarkbilinearen, die wir benötigen,

$$\begin{aligned} [j_i^\mu(x), \frac{i}{2} \bar{q}_k(\gamma) \gamma_1 \overset{\leftrightarrow}{\partial}_1 q_k(\gamma)] &= i \delta_{ik} \varepsilon^{\mu\nu} j_{\nu i}(x) \partial_x \delta(x-\gamma) \\ [j_{0i}(x), M_{k\pm}(\gamma)] &= 0 \\ [j_{1i}(x), M_{k\pm}(\gamma)] &= \mp 2 \delta_{ik} M_{k\pm}(x) \delta(x-\gamma) \end{aligned} \quad (3.78)$$

mit

$$M_{k\pm}(x) = \bar{q}_k(x) (1 \pm \gamma_5) q_k(x) \quad (3.79)$$

werden durch die kanonische Ersetzung⁽³⁰⁾

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \bar{q}_i(\gamma) \gamma_1 \overset{\leftrightarrow}{\partial}_1 q_i(\gamma) &= \frac{1}{2} \{ (\pi_i(\gamma))^2 + (\partial_\gamma \phi_i(\gamma))^2 \} \\ M_{i\pm}(\gamma) &= -2\Lambda \exp \{ \mp 2i \sqrt{\pi} \phi_i(\gamma) \} \end{aligned} \quad (3.80)$$

erfüllt, wobei Λ ein willkürlicher reeller Massenparameter ist. Um die Hamiltondichte (2.34a) ganz durch ϕ_i und π_i auszudrücken, eliminiert man noch die nichtverschwindenden Komponenten von F_{01} und A_1 mit Hilfe des Gauss'schen Gesetzes, das in der Baluni Eichung

$$\partial_1 (F_{01})_{ii} = -\frac{g}{2} \left(j_i^0 - \frac{1}{N} \bar{j}^0 \right) = -\frac{g}{2\sqrt{\pi}} \partial_1 \left(\phi_i - \frac{1}{N} \sum_j \phi_j \right) \quad (3.81a,b)$$

$$(A_1)_{ij} \left[(F_{01})_{ii} - (F_{01})_{jj} \right] = \frac{i}{2} \bar{q}_j \gamma_0 q_i \quad (i \neq j)$$

lautet. Wegen (3.81a) identifiziert man

$$(F_{01})_{ii} = -\frac{g}{2\sqrt{\pi}} \left(\phi_i - \frac{1}{N} \sum_j \phi_j \right) \quad (3.82)$$

und erhält damit

$$\sum_a \frac{1}{2} (F_{01}^a)^2 = S_P F_{01}^2 = \sum_i [(F_{01})_{ii}]^2 = \frac{g^2}{8\pi N} \sum_{i,j} (\phi_i - \phi_j)^2 \quad (3.83)$$

und

$$g A_1^a \bar{q} \frac{\lambda^a}{2} \gamma_1 q = \sum_{i \neq j} g \bar{q}_i (A_1)_{ij} \gamma_1 q_j = \sum_{i \neq j} \frac{ig}{2} \bar{q}_i \gamma_1 q_j \bar{q}_j \gamma_0 q_i \frac{2\sqrt{\pi}/g}{\phi_j - \phi_i}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{4i} \sum_{i \neq j} \frac{M_{i+} M_{j-} - M_{i-} M_{j+}}{\phi_i - \phi_j} = -2\sqrt{\pi} \Lambda^2 \sum_{i \neq j} \frac{\sin 2\sqrt{\pi}(\phi_i - \phi_j)}{\phi_i - \phi_j} \quad (3.84)$$

wobei im vorletzten Schritt eine Fierztransformation durchgeführt worden ist.

Mit diesen Ersetzungen erhält die Hamiltondichte die Form

$$\mathcal{H} = N_\Lambda \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \left[\pi_i^2 + (\partial_1 \phi_i)^2 + 4m\Lambda(1 - \cos 2\sqrt{\pi} \phi_i) \right] \right. \\ \left. + \sum_{i \neq j} \left[\frac{g^2}{8\pi N} (\phi_i - \phi_j)^2 - 2\sqrt{\pi} \Lambda^2 \frac{\sin 2\sqrt{\pi}(\phi_i - \phi_j)}{\phi_i - \phi_j} \right] \right\} \quad (3.85)$$

und N_Λ bedeutet, daß alle Produkte von Feldern ϕ_i bezüglich eines freien Feldes der Masse Λ normalgeordnet werden sollen.

Spaltet man den $U(1)$ -Anteil von den ϕ_i ab, indem man zu den neuen Feldern

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \phi_i \\ \psi_d &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i \lambda_{ii}^d \phi_i\end{aligned}\tag{3.86}$$

übergeht⁽²⁹⁾, wobei λ^d eine der diagonalen λ -Matrizen bezeichnet, so sieht man wegen

$$\sum_d \psi_d^2 = \sum_i \phi_i^2 - \chi^2 = \frac{1}{2N} \sum_{i,j} (\phi_i - \phi_j)^2\tag{3.87}$$

daß nur die ψ_d eine Masse der Ordnung g bekommen, während die χ -Masse proportional $\frac{m\Lambda}{N}$ ist. Für starke Kopplung, $g \gg m$, beschreiben die ψ_d also massive Objekte und können daher im niederenergetischen Bereich der Theorie vernachlässigt werden. Effektiv kann man $\psi_d = 0$ und damit $\phi_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \chi$ setzen und erhält so die effektive Hamiltondichte

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = N_{\Lambda} \left\{ \frac{1}{2} (\pi_{\chi}^2 + (\partial_1 \chi)^2) + 2m\Lambda (1 - \cos 2\sqrt{\frac{\pi}{N}} \chi) \right\}\tag{3.88}$$

Die Dynamik der χ und damit der U(1)-Ströme $\bar{j}_{\mu}$ ist also durch eine Sinus-Gordon-Gleichung mit Kopplung $\beta = 2\sqrt{\frac{\pi}{N}}$ gegeben oder, äquivalent dazu, durch ein massives Thirring Modell mit Kopplung

$$\tilde{g} = \pi \left(\frac{4\pi}{\beta^2} - 1 \right) = \pi (N-1)\tag{3.89}$$

und einem Massenparameter proportional $\sqrt{m\Lambda}$ ⁽¹⁰⁾. Das Spektrum der Sinus-Gordon-Gleichung⁽¹²⁾ und des massiven Thirring Modells⁽¹¹⁾ ist wohl-bekannt. Es enthält ein schweres Fermion der Masse m_F (das Soliton der Sinus-Gordon-Gleichung bzw. das "elementare Fermion" des massiven Thirring Modells) und Fermion-Antifermion-Bindungszustände der Massen

$$\begin{aligned}M_n &= 2m_F \sin \left(\frac{n\pi}{2} \frac{\pi}{2\tilde{g} + \pi} \right) & ; n \in \mathbb{N} \\ &= 2m_F \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{n}{2N-1} \right) & ; n < 2\frac{\tilde{g}}{\pi} + 1 = 2N-1\end{aligned}\tag{3.90}$$

Für starke Kopplung enthält der U(1)-Sektor der QCD₂ also 2(N-1) mesonische Bindungszustände, die leichter sind als die doppelte Masse eines schweren Fermions, das wir als Baryon bezeichnen können. Durch genauere

Analyse der Normalordnungsvorschrift in (3.85) kann m_F bestimmt werden. Steinhardt erhält für große N ⁽²⁹⁾

$$m_F \approx \frac{8N}{\sqrt{\pi}} \sqrt{m \left(\frac{g^2}{\pi} \right)^{1/2}} \quad (3.91)$$

Damit können wir nun formal den Grenzübergang $m \rightarrow 0$ vollziehen. Wegen (3.91) werden alle Bindungszustände des $U(1)$ -Sektors für $m = 0$ masselos. Da das χ -Feld und damit der gesamte $U(1)$ -Sektor nur über den $\cos 2\pi\phi_i$ -Term in (3.85), der für $m = 0$ verschwindet, an die ψ_d -Felder koppelt, wird der $U(1)$ -Sektor im masselosen Fall frei. Er beschreibt dann masselose Mesonen und ein masseloses Baryon, deren Dynamik durch das Thirring Modell gegeben ist. Die Kopplungskonstante des masselosen Thirring Modells ist jedoch keine durch die Dynamik eindeutig definierte Größe⁽⁹⁾. Ihr Wert (3.89) muß daher beim Grenzübergang $m \rightarrow 0$ nicht erhalten bleiben. Im nächsten Kapitel werden wir sehen, daß im masselosen Fall vielmehr $\tilde{g} = 0$ gesetzt werden kann. In welchem Sinne man dann noch von einer durch das Thirring Modell gegebenen Dynamik sprechen kann und inwieweit der Grenzübergang $m \rightarrow 0$ das Verhalten der masselosen Theorie liefert, soll im nun folgenden Kapitel untersucht werden.

4. DER $U(1)$ -SEKTOR DER MASSELOSEN THEORIE

Im Abschnitt 3.2 hatten wir gesehen, daß die masselose QCD_2 für beliebiges N einen exakten, masselosen, mesonischen Energieeigenzustand besitzt, der gemäß (3.65) durch

$$|M; p_- \rangle = c_M \sum_{i=1}^N \int_0^1 dx \, b_i^+((1-x)p_-) d_i^+(x p_-) |0 \rangle \quad (4.1)$$

gegeben ist, wobei c_M eine geeignet zu wählende Normierungskonstante ist. Amati et al. haben einen analogen exakten, masselosen, baryonischen Zustand gefunden⁽³¹⁾, der durch

$$|B; p_- \rangle = c_B \int_0^1 dx_1 \dots dx_N \, b_1^+(x_1 p_-) b_2^+(x_2 p_-) \dots b_N^+(x_N p_-) |0 \rangle \delta(1 - \sum_{i=1}^N x_i) \quad (4.2)$$

gegeben ist.

Benutzt man die Fourierzerlegung des Quarkfeldes (3.62), so erkennt man leicht, daß $|M; p_-\rangle$ durch

$$\int dx^- e^{-i p_- x^-} \sum_{i=1}^N q_{+i}^+(x^-) q_{+i}(x^-) \quad (4.3)$$

und daß $|B; p_-\rangle$ durch

$$\int dx^- e^{-i p_- x^-} \sum_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} q_{+i_1}^+(x^-) q_{+i_2}^+(x^-) \dots q_{+i_N}^+(x^-) \quad (4.4)$$

aus dem Vakuum erzeugt wird. ($\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N}$ bezeichnet den total antisymmetrischen Tensor mit N Indizes und $\varepsilon_{12 \dots N} = +1$). Der in (4.3) auftauchende lokale $SU(N)$ -Singlett-Operator $q_{+}^+ q_{+}$ ist nichts anderes als die Linearkombination $\frac{1}{2}(\bar{J}_0 - \bar{J}_1)$ der $U(1)$ -Ströme, die bei Bosonisierung in das skalare $U(1)$ -Feld X des letzten Abschnittes übergehen. Damit wird klar, daß $|M\rangle$ und $|B\rangle$ zwei der masselosen Teilchen sind, die wir im $U(1)$ -Sektor der masselosen Theorie erwarten. Dieser $U(1)$ -Sektor soll nun im Rahmen der temporalen Eichung genauer untersucht werden.

4.1. $U(1)$ -Teilchen in der temporalen Eichung und das Thirring Modell

Daß die masselose QCD_2 masselose Teilchen enthalten muß, erkennt man leicht, wenn man die Bewegungsgleichung der $U(1)$ -Ströme betrachtet. Aus (2.44d,e) folgt, daß der axiale und der Vektor- $U(1)$ -Strom separat erhalten sind, und damit gilt

$$\square \bar{J}_\mu(x,t) \equiv (\partial_0^2 - \partial_1^2) \bar{J}_\mu(x,t) = 0 \quad (4.5)$$

was die Existenz eines masselosen, freien Teilchens impliziert^(31,32). Zwar gibt es in zwei Dimensionen kein freies, masseloses Skalarfeld, da die entsprechenden Wightmanfunktionen infrarot divergent sind, wohl aber kann man freie, masselose, skalare Teilchen definieren⁽³³⁾. Setzt man nämlich

$$\bar{u}_\pm(k) = \sqrt{\frac{\pi}{N}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm i k x} (\bar{J}_1(x) - \text{sgn}(k) \bar{J}_0(x)) \quad (4.6)$$

so folgt aus (2.32d)

$$\begin{aligned} [\bar{u}_-(k), \bar{u}_+(k')] &= 2\pi \, 2|k| \, \delta(k-k') \\ [\bar{u}_\pm(k), \bar{u}_\pm(k')] &= 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

und (2.36) und (2.44) liefern

$$\begin{aligned} [H, \bar{u}_\pm(k)] &= \pm |k| \bar{u}_\pm(k) \\ [P, \bar{u}_\pm(k)] &= \pm k \bar{u}_\pm(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$\bar{u}_+$ bzw. $\bar{u}_-$ verhalten sich also genau wie kanonisch normierte⁽¹⁶⁾ Erzeuger und Vernichter eines freien, masselosen Bosons. Es ist nun eine Besonderheit räumlich eindimensionaler Systeme, daß ein normierbarer Zustand, der zwei masselose Teilchen beschreibt, die sich beide in die gleiche Richtung bewegen, wieder Ruhemasse Null hat und damit als masseloses Teilchen interpretiert werden kann. Die $2(N-1)$ Mesonen des Abschnitts 3.3, die für $m \rightarrow 0$ ihre Masse verlieren, können also ohne Schwierigkeiten als masselose Zustände in dem Fockraum gedeutet werden, der von den $\bar{u}_+(k)$ auf dem Vakuumzustand $|0\rangle$ aufgebaut wird.

Daneben enthält der $U(1)$ -Sektor noch ein Baryon, das für $m = 0$ durch

$$B_\alpha(x) = \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \dots i_N} \epsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} q_{i_1 \alpha}(x) q_{i_2 \alpha}(x) \dots q_{i_N \alpha}(x) \quad ; \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.9)$$

erzeugt wird. Offensichtlich ist $B_\alpha(x)$ ein eichinvarianter Operator, und eine einfache Rechnung zeigt, daß

$$[H, B_\alpha(x)] = -i (\gamma_5)_{\alpha\alpha} \partial_x B_\alpha(x) \quad (4.10)$$

gilt. Die Operatoren $\int dx \exp(ikx) B_\alpha(x)$ erzeugen damit genau das von Amati et al.⁽³¹⁾ gefundene masselose Baryon aus dem Vakuum.

Wir können nun den $U(1)$ -Sektor mit dem Thirring Modell identifizieren. Dazu nehmen wir zunächst an, daß der fermionische Bindungszustand des massiven Thirring Modells in Abschnitt 3.3 für $m \rightarrow 0$ in $B_\alpha(x)$ übergeht.

Dementsprechend identifizieren wir B_α mit dem fundamentalen Fermifeld des Thirring Modells. Nun kann man (4.10) umschreiben in

$$i \gamma^\mu \partial_\mu B(x,t) = 0 \quad (4.11)$$

und damit ergibt sich für unser Thirring Modell die Kopplungskonstante $\tilde{g} = 0$. Dennoch kann $B(x,t)$ nicht als freies Fermifeld aufgefaßt werden, wie man sofort sieht, wenn man die Zweipunkt-Wightman-Funktion für kleine raumartige Abstände betrachtet

$$\langle \Omega | B(x,t) \bar{B}(y,t) | \Omega \rangle = \left(\frac{i}{2\pi(x-y)} \right)^N \begin{cases} \gamma_0 & N \text{ gerade} \\ \gamma_1 & N \text{ ungerade} \end{cases} \quad (4.12)$$

Da der $U(1)$ -Sektor nur masselose Teilchen und keinen dimensionsbehafteten Parameter enthält, muß (4.12) auch für große Abstände $|x-y|$ gelten.

Dies können wir nun mit den Wightmanfunktionen vergleichen, die Klaiber in seiner Lösung des Thirring Modells angegeben hat⁽⁹⁾. Klaiber schreibt die Wightmanfunktionen des "Fermi"-Feldes ϕ , das die Bewegungsgleichung des Thirring Modells

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \phi(x,t) = -\tilde{g} \gamma^\mu j_\mu(x,t) \phi(x,t) \quad (4.13)$$

löst, in Termen der beiden Parameter α, β (oder alternativ dazu $a = \alpha^2 - 2\sqrt{\pi}\alpha$, $b = \beta^2 - 2\sqrt{\pi}\beta$, $\lambda = \alpha\beta - \sqrt{\pi}(\alpha+\beta)$) und der Renormierungsmasse μ . Speziell die Zweipunktfunktion ist gegeben durch

$$\langle \Omega | \phi(x) \bar{\phi}(y) | \Omega \rangle = \frac{e^{-i \frac{a+b}{4}}}{2\pi i} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\xi^0 + \xi^1 - i\varepsilon} \\ 1 & 0 \\ \frac{1}{\xi^0 - \xi^1 - i\varepsilon} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \left[\frac{1}{\mu(\xi^0 - \xi^1 - i\varepsilon)} \right]^{\frac{a+b+2\lambda}{4\pi}} \left[\frac{1}{\mu(\xi^0 + \xi^1 - i\varepsilon)} \right]^{\frac{a+b-2\lambda}{4\pi}} & 0 \\ 0 & \left[\frac{1}{\mu(\xi^0 - \xi^1 - i\varepsilon)} \right]^{\frac{a+b-2\lambda}{4\pi}} \left[\frac{1}{\mu(\xi^0 + \xi^1 - i\varepsilon)} \right]^{\frac{a+b+2\lambda}{4\pi}} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

mit $\xi = (\xi^0, \xi^1) = x-y$. Der Parameter λ bestimmt das Verhalten von ϕ unter Lorentztransformationen $U(\Lambda)^{(9)}$

$$U(\Lambda)^{-1} \phi(x) U(\Lambda) = e^{\left[\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2\pi}\right] \chi \gamma_5} \phi(\Lambda^{-1}x) \quad (4.15)$$

und speziell $\lambda = 0$ gibt das Transformationsverhalten eines freien Diracfeldes.

Klaibers Parameter können nun so gewählt werden, daß B und ϕ bis auf einen Normierungsfaktor identifiziert werden können. Da B ein Produkt aus N Quarkfeldern ist, die sich kanonisch unter Lorentztransformationen verhalten, muß

$$\lambda = \pi(N-1) \quad (4.16)$$

gelten. Vergleicht man (4.12) und (4.14) für $\xi^0 = 0$, so folgt durch Gleichsetzen der Exponenten von $1/\xi^1$

$$\frac{a+b}{2\pi} = N-1 \quad (4.17)$$

und damit

$$\alpha = \beta = \sqrt{\pi}(1 \pm \sqrt{N})$$

$$a = b = \lambda = \pi(N-1) \quad (4.18)$$

Benutzt man diese Werte in (4.14) so erhält man

$$\langle \Omega | \phi(x) \bar{\phi}(y) | \Omega \rangle = \frac{(-i)^N}{2\pi \mu^{N-1}} \begin{pmatrix} 0 & [\xi^0 + \xi^1 - i\varepsilon]^{-N} \\ [\xi^0 - \xi^1 - i\varepsilon]^{-N} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

und deshalb die Identifikation

$$\phi(x) = \left(\frac{2\pi}{\mu}\right)^{\frac{N-1}{2}} B(x) \quad (4.20)$$

Um diese Gleichsetzung zu überprüfen, kann man sich nun anschauen, welche Eigenschaften Klaibers Lösung für die in (4.18) angegebenen Werte der Pa-

parameter α und β hat. Man findet⁽⁹⁾

i) $\phi(x)$ erfüllt die Bewegungsgleichung

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \phi(x) = -\sqrt{\pi}(\alpha - \beta) \gamma^\mu \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left[j_\mu(x+\epsilon) \phi(x) + \phi(x) j_\mu(x-\epsilon) \right] \quad (4.21)$$

d.h. genau für $\alpha = \beta$ ist ϕ eine Lösung von (4.11).

ii) Für $\alpha = \beta$ enthält die Zweipunktfunktion im Impulsraum einen δ -Funktions-Beitrag auf dem Lichtkegel. Das Thirring Modell beschreibt dann ein freies, masseloses "Baryon", das von $\phi(x)$ aus dem Vakuum erzeugt wird.

iii) Für raumartige Abstände $(x-y)^2 < 0$ gilt

$$\{ \phi(x), \phi^\dagger(y) \} = \{ \phi(x), \phi(y) \} = 0 \quad \text{für } \frac{\lambda}{\pi} \in \mathbb{Z} \text{ gerade}$$

$$[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = [\phi(x), \phi(y)] = 0 \quad \text{für } \frac{\lambda}{\pi} \in \mathbb{Z} \text{ ungerade}$$

Mit $\lambda = \pi(N-1)$ verhält sich ϕ als Fermion für ungerade N und als Boson für gerade N . Dies entspricht genau der Konstruktion von $B(x)$ aus N Fermifeldern.

Mit Punkt iii) ergibt sich nun scheinbar ein Widerspruch zu der allgemein gemachten Annahme, daß das Soliton der Sinus-Gordon-Gleichung und das elementare Feld des Thirring Modells für $m \neq 0$ fermionische Freiheitsgrade beschreiben^(11,13,34). Diese Unstimmigkeit kann man beseitigen, indem man zwischen den Feldern, die die Bewegungsgleichungen erfüllen, und den entsprechenden Bindungszuständen unterscheidet. Der Operator $B(x)$ ist offensichtlich mit den baryonischen Bindungszuständen der massiven Theorie verknüpft, während das dynamische Feld des massiven Thirring Modells im Limes $m \rightarrow 0$ in ein Feld $\tilde{\phi}$ übergehen sollte, das die Bewegungsgleichung (4.13) erfüllt, wobei der Strom j_μ mit dem $U(1)$ -Strom $\tilde{j}_\mu$ identifiziert wird.

Analog zur Lösung des Thirring Modells durch Klaiber kann man ein solches Feld ohne Schwierigkeiten aus $B(x)$ und $\tilde{j}_\mu(x)$ konstruieren. Formal setzt man dazu

$$\tilde{\phi}(x) = \exp \left\{ i \int_{-\infty}^x (b \bar{j}_0(\gamma) + c \gamma_5 \bar{j}_1(\gamma)) d\gamma \right\} B(x) \quad (4.22)$$

und erhält mit Hilfe der Zeitableitungen von $B(x)$ und $\bar{j}_\mu(x)$

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \tilde{\phi}(x) = (b - c) \gamma^\mu \bar{j}_\mu(x) \tilde{\phi}(x) \quad (4.23)$$

Durch geeignete Wahl der Parameter b und c kann man so Gl.(4.13) mit beliebiger Kopplungskonstante $\tilde{g}$ erfüllen.

Natürlich sind (4.22) und (4.23) als Operatorgleichungen nicht wohldefiniert. Um dies zu erreichen, kann man völlig analog zur Arbeit Klaibers⁽⁹⁾ vorgehen, was hier jedoch nicht ausgeführt werden soll. Insbesondere kann man erreichen, daß das Feld $\tilde{\phi}$ Antikommutatorrelationen erfüllt, unabhängig von der Anzahl der elementaren Quarkfelder in $B(x)$. Da $\tilde{\phi}$ als aus dem Baryonfeld B und den $U(1)$ -Strömen $\bar{j}_\mu$ zusammengesetzt aufgefaßt werden kann, werden wir uns von nun an auf die Betrachtung von $\bar{j}_\mu$ und B beschränken.

Wie wir gesehen haben, enthält der $U(1)$ -Sektor der QCD_2 masselose Teilchen, die nicht mit den restlichen Zuständen der Theorie wechselwirken. Damit sollte es möglich sein, den $U(1)$ -Sektor vom Rest der Theorie abzuspalten, was notwendig ist, wenn man das Massenspektrum der QCD_2 bestimmen will, denn die Anwesenheit freier, masseloser Teilchen führt notwendigerweise zu einem kontinuierlichen Spektrum. Um diese Abspaltung durchzuführen, muß man den Energie-Impuls-Tensor $\theta_{\mu\nu}$ in zwei Anteile $\theta_{1\mu\nu} + \theta_{2\mu\nu}$ aufzuspalten, so daß $\theta_{2\mu\nu}$ genau die Dynamik des $U(1)$ -Sektors liefert, andererseits aber mit allen nicht- $U(1)$ -Zuständen vertauscht. Einen Kandidaten für $\theta_{2\mu\nu}$ kann man der Arbeit von Callan, Dashen und Sharp⁽³⁵⁾ über das Thirring Modell entnehmen. Sie haben gezeigt, daß die Dynamik von Strömen j_μ und $j_{\mu 5} = \epsilon_{\mu\nu} j^\nu$, die separat erhalten sind und deren Kommutator durch

$$[j_\mu(x,t), j_\nu(y,t)] = i \epsilon_{\mu\nu} c \partial_x \delta(x-y) \quad (4.24)$$

gegeben ist, erzeugt wird vom Energie-Impuls-Tensor

$$\theta_2^{\mu\nu} = \frac{1}{2c} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ j^\mu(x+\varepsilon) j^\nu(x) + j^\nu(x+\varepsilon) j^\mu(x) - g^{\mu\nu} j_S(x+\varepsilon) j_S(x) \right\} / e.A. \quad (4.25)$$

wobei /e.A. bedeutet, daß in der Operatorproduktentwicklung nur der endliche Anteil berücksichtigt werden soll. Wir wählen nun den U(1)-Strom $\bar{j}_\mu$ für $\theta_2^{\mu\nu}$ und damit $c = \frac{N}{\pi}$. Mit

$$H_2 = \int dx \theta_2^{00}(x) \quad P_2 = \int dx \theta_2^{01}(x) \quad (4.26)$$

folgen die Bewegungsgleichungen (2.44d,e) mit H_2 anstelle von H direkt mit Hilfe des Schwinger Terms in (4.24). Damit H_2 und P_2 als Energie- und Impulsoperator des U(1)-Sektors genommen werden können, müssen sie zusätzlich die Bewegungsgleichung für den Baryonoperator reproduzieren. Tatsächlich findet man

$$\begin{aligned} [H_2, B_\alpha(x)] &= \frac{\pi}{2N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ d\gamma \left[\bar{j}_0^0(\gamma+\varepsilon) \bar{j}_0(\gamma) + \bar{j}_1(\gamma+\varepsilon) \bar{j}_1(\gamma), B_\alpha(x) \right] \right\} / e.A. \\ &= -2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} : q_\alpha^+(x+\varepsilon) q_\alpha(x+\varepsilon) : \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} q_{i_1 \alpha}(x) \dots q_{i_N \alpha}(x) / e.A. \\ &= -2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{N!} \sum_{i_1 \dots i_N} \varepsilon_{i_1 \dots i_N} \sum_{n=1}^N q_{i_1 \alpha}(x) \dots \langle q_{i_n \alpha}(x) q_{i_n \alpha}^+(x+\varepsilon) \rangle q_{i_n \alpha}(x+\varepsilon) \dots q_{i_N \alpha}(x) / e.A. \\ &= -i (\gamma_5)_{\alpha\alpha} \partial_x B_\alpha(x) \end{aligned} \quad (4.27)$$

wobei im zweiten Schritt die Fermi-Statistik der Quarks ausgenutzt wurde, um das normalgeordnete Produkt der $N+2$ Quarkfelder zu eliminieren. Eine analoge Rechnung liefert

$$[P_2, B_\alpha(x)] = i \partial_x B_\alpha(x) \quad (4.28)$$

und damit erfüllt $\theta_2^{\mu\nu}$ alle Bedingungen, da es zusätzlich mit den nicht-U(1)-Operatoren A_{a1}^a, F_{0a1}^a und j_μ^a vertauscht. Dagegen kommutieren H_2 und P_2 nicht mit dem elementaren Quarkfeld q_i . Hier werden wir uns auf den Standpunkt stellen, daß $[H_2, q]$ und $[P_2, q]$ genau den U(1)-Anteil des Quarks definieren.

4.2. "Angezogene" Quarkfelder

Analog zu dem im letzten Abschnitt besprochenen Baryonoperator $B(x)$ kann man aus lokalen Produkten von Quarkfeldern Operatoren konstruieren, die sich unter Eichtransformationen nichttrivial verhalten und gegenüber dem elementaren Quarkfeld $q(x)$ durch einige zusätzliche Eigenschaften ausgezeichnet sind. Insbesondere benötigen wir im nächsten Kapitel einen Operator $Q(x)$, der bei Multiplikation mit $j_0^a(x) \pm j_1^a(x)$ verschwindet. Solche Operatoren werden von nun an als angezogene Quarkfelder bezeichnet und sind durch die folgenden Eigenschaften definiert:

- i) $Q_\alpha(x)$ soll ein lokaler Operator sein, der sich bei Eichtransformationen homogen unter einer irreduziblen Darstellung der $SU(N)$ transformiert.
- ii) Unter infinitesimalen Zeitverschiebungen soll sich Q_α wie das elementare Quarkfeld verhalten, d.h. es soll gelten

$$[H, Q(x)] = -i\gamma_5 \vec{D}_1 Q(x) \quad (4.29)$$

wobei D_1 die kovariante Ableitung in der Darstellung von Q bezeichnet.

- iii) Das (geeignet zu definierende) Produkt

$$(j_0^a(x) + (\gamma_5)_{\alpha\alpha} j_1^a(x)) Q_\alpha(x) \quad (4.30)$$

soll verschwinden.

Um die Q_α zu konstruieren, beginnen wir mit einem lokalen Produkt von $1 \leq p \leq N-1$ Quarkfeldern: $q_{i_1\alpha}(x) q_{i_2\alpha}(x) \dots q_{i_p\alpha}(x)$. Wegen der Fermistatistik der Quarks ist dieses Produkt total antisymmetrisch in den Indizes $i_1, i_2, \dots, i_p$ und transformiert sich daher unter der durch das Young Tableau

$$\left. \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right\} p$$

gegebenen irreduziblen Darstellung Λ_p von $SU(N)$ ⁽³⁶⁾. Die zu dieser Darstellung gehörenden Generatoren bezeichnen wir mit $\frac{\tilde{\lambda}^a}{2} T_s$, wobei die Indizes r, s von 1 bis zur Dimension $d = \binom{N}{p}$ der Darstellung laufen, und $T_s^{[i_1 \dots i_p]}$ steht für den Tensor, der aus dem p -fachen Produkt der fundamentalen Darstellung den total antisymmetrischen Anteil herausprojiziert. Bis auf eine Normierungskonstante ist er definiert durch

$$\sum_s \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} T_s^{[i_1 i_2 \dots i_p]} = \sum_{k=1}^N \sum_{\ell=1}^p T_r^{[i_1 \dots i_{\ell-1} k i_{\ell+1} \dots i_p]} \frac{\lambda^a}{2} \kappa_{i_\ell} \quad (4.31)$$

Damit können wir das Produkt der p Quarks ersetzen durch

$$\sum_{i_1 \dots i_p=1}^N T_s^{[i_1 \dots i_p]} q_{i_1 \alpha}(x) q_{i_2 \alpha}(x) \dots q_{i_p \alpha}(x) \quad (4.32)$$

und offensichtlich erfüllt (4.32) die Bedingung i). Multipliziert man (4.32) mit einem lokalen $SU(N)$ -Singlett-Operator am Ort x , so ändert sich das Eichverhalten von (4.32) nicht, wohl aber werden die Bedingungen ii) und iii) beeinflusst. Um die Eigenschaft iii) zu erreichen, kann man nun das Pauli Prinzip ausnutzen; multipliziert man (4.32) mit $B_\alpha^+(x)$, so werden alle Farbmoden von q_α^+ am Punkt x gefüllt, und damit ergibt nochmalige Multiplikation mit einem $q_{\kappa\alpha}^+(x)$ aus $j_0^a(x) + (\gamma_5)_{\alpha\alpha} j_1^a(x)$ Null.

Diese Argumentation muß natürlich noch präzisiert werden, indem man alle Produkte durch Pointsplitting geeignet definiert. Dazu setzen wir zunächst

$$Q_{s\alpha}^{(p)}(x, \varepsilon) = B_\alpha^+(x+\varepsilon) \sum_{i_1 \dots i_p} T_s^{[i_1 \dots i_p]} q_{i_1 \alpha}(x) \dots q_{i_p \alpha}(x) \quad (4.33)$$

und

$$j_\mu^a(x, \varepsilon) = \bar{q}(x+\varepsilon) P_{x+\varepsilon}^x \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q(x) \quad (4.34)$$

und definieren das angezogene Quarkfeld $Q_{s\alpha}^{(p)}(x)$ und das Produkt (4.30) durch den endlichen Anteil in der Operatorproduktentwicklung

$$Q_{s\alpha}^{(p)}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_{s\alpha}^{(p)}(x, \varepsilon) / e.A. \quad (4.35)$$

und

$$\begin{aligned} & \left(j_0^a(x) + (\gamma_5)_{\alpha\alpha} j_1^a(x) \right) Q_{s\alpha}^{(p)}(x) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(j_0^a(x, \varepsilon) + (\gamma_5)_{\alpha\alpha} j_1^a(x, \varepsilon) \right) Q_{s\alpha}^{(p)}(x, \varepsilon) / e.A. = 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Die rechte Seite von (4.36) enthält für jedes $\varepsilon \neq 0$ $N+1$ Quarkfelder q^+ am Ort $x+\varepsilon$ und verschwindet daher identisch, womit Bedingung iii) erfüllt ist. Unter Ausnutzung von (4.10) und (4.31) erhält man nun

$$\begin{aligned} [H, Q_{s\alpha}^{(p)}(x)] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [H, B_\alpha^+(x+\varepsilon) \sum_{i_1 \dots i_p} T_s^{[i_1 \dots i_p]} q_{i_1\alpha}(x) \dots q_{i_p\alpha}(x)] / e.A. \\ &= -i(\gamma_5)_{\alpha\alpha} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ (\partial_x B_\alpha^+(x+\varepsilon)) \sum_{i_1 \dots i_p} T_s^{[i_1 \dots i_p]} q_{i_1\alpha}(x) \dots q_{i_p\alpha}(x) \right. \\ &\quad \left. + B_\alpha^+(x+\varepsilon) \sum_{i_1 \dots i_p} T_s^{[i_1 \dots i_p]} \sum_{e=1}^p q_{i_e\alpha}(x) \cdot (\vec{D}_1 q_\alpha(x))_{i_e} \dots q_{i_p\alpha}(x) \right\} / e.A. \quad (4.37) \\ &= -i(\gamma_5)_{\alpha\alpha} \sum_r \left(\partial_x \delta_{sr} - ig \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} s_r A_1^a(x) \right) Q_{r\alpha}^{(p)}(x) \\ &= -i(\gamma_5 \vec{D}_1 Q^{(p)}(x))_{s\alpha} \end{aligned}$$

und damit erfüllt $Q^{(p)}$ (4.29) und genügt damit allen an angezogene Quarkfelder gestellten Forderungen.

Um den $U(1)$ -Anteil von $Q^{(p)}$ zu identifizieren, wollen wir nun noch den Kommutator mit H_2 und P_2 berechnen. Dazu genügt es

$$[H_2, q_{i_1\alpha}(x) q_{i_2\alpha}(x) \dots q_{i_p\alpha}(x)] \quad (4.38)$$

zu betrachten. Eine einfache Rechnung ergibt hierfür

$$\begin{aligned} & - \frac{2\pi p}{N} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\{ q_\alpha^+(x+\delta) q_\alpha(x+\delta) : q_{i_1\alpha}(x) \dots q_{i_p\alpha}(x) \right\} / e.A. \\ &= - \frac{2\pi p}{N} \left\{ \frac{i(\gamma_5)_{\alpha\alpha}}{2\pi} \partial_x (q_{i_1\alpha}(x) \dots q_{i_p\alpha}(x)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_k : q_{k\alpha}^+(x) q_{k\alpha}(x) q_{i_1\alpha}(x) \dots q_{i_p\alpha}(x) : \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

Um den $B_\alpha^+(x+\varepsilon)$ Faktor in $[H_2, Q^{(p)}(x)]$ auszunützen, ersetzt man das normalgeordnete Produkt auf der rechten Seite von (4.39) durch

$$\begin{aligned}
 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} : q_{\alpha}^{+}(x+\varepsilon) P_{x+\varepsilon}^x q_{\alpha}(x) q_{i_1 \alpha}(x) \dots q_{i_p \alpha}(x) : \\
 = q_{\alpha}^{+}(x+\varepsilon) P_{x+\varepsilon}^x q_{\alpha}(x) q_{i_1 \alpha}(x) \dots q_{i_p \alpha}(x) / e.A. \\
 + \frac{i(\gamma_5)_{\alpha\alpha}}{2\pi} \sum_{\ell=1}^p q_{i_1 \alpha}(x) \dots (-ig A_1(x) q_{\alpha}(x))_{i_{\ell}} \dots q_{i_p \alpha}(x)
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

und damit erhält man

$$\begin{aligned}
 [H_2, \sum_{i_1 \dots i_p} T_s^{[i_1 \dots i_p]} q_{i_1 \alpha}(x) \dots q_{i_p \alpha}(x)] \\
 = -\frac{p}{N} i(\gamma_5)_{\alpha\alpha} \sum_r (\vec{D}_1)_s r \sum_{i_1 \dots i_p} T_r^{[i_1 \dots i_p]} q_{i_1 \alpha}(x) \dots q_{i_p \alpha}(x) \\
 - \frac{2\pi p}{N} q_{\alpha}^{+}(x+\varepsilon) P_{x+\varepsilon}^x q_{\alpha}(x) \sum_{i_1 \dots i_p} T_s^{[i_1 \dots i_p]} q_{i_1 \alpha}(x) \dots q_{i_p \alpha}(x) / e.A.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Berücksichtigung des $B_{\alpha}^{+}(x+\varepsilon)$ -Faktors eliminiert den zweiten Term und liefert das Ergebnis

$$\begin{aligned}
 [H_2, Q_s^{(p)}(x)] &= -i(\gamma_5)_{\alpha\alpha} \frac{p}{N} (\vec{D}_1 Q_{\alpha}^{(p)})_s(x) \\
 &- i(\gamma_5)_{\alpha\alpha} \frac{N-p}{N} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ (\partial_x B_{\alpha}^{+}(x+\varepsilon)) \sum_{i_1 \dots i_p} T_s^{[i_1 \dots i_p]} q_{i_1 \alpha}(x) \dots q_{i_p \alpha}(x) \right\} / e.A.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Der entsprechende Kommutator mit P_2 liefert bis auf das durch $(\gamma_5)_{\alpha\alpha}$ gegebene Vorzeichen das gleiche Ergebnis, und im Prinzip kann (4.42) benutzt werden, um den $U(1)$ -Anteil der Energie von Zuständen zu berechnen, die mit Hilfe der $Q^{(p)}$ aus dem Vakuum erzeugt werden.

4.3. Das Schwinger Modell

Bisher haben wir nur den $U(1)$ -Sektor der masselosen $SU(N)$ -Eichtheorie betrachtet; es bereitet aber keine Schwierigkeiten, die bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels, insbesondere die Konstruktion der Erzeuger und Vernichter $\bar{U}_{+}(K)$ auf die $U(1)$ -Eichtheorie, d.h. das Schwinger Modell zu übertragen. Die Konstruktion von Operatoren, die die Eigenwertgleichung (4.8) erfüllen, war nämlich genau deshalb möglich, weil die beiden Stromkomponenten $\vec{J}_0$ und $\vec{J}_1$ unter infinitesimalen Zeitverschiebungen ein geschlossenes System bilden. Betrachtet man nun die Bewegungsgleichungen (2.39) und (2.44), so erkennt man sofort, daß im Schwinger Modell

j_0 , j_1 und F_{01} ein ebensolches abgeschlossenes System eichinvarianter Operatoren bilden. Mit dem Ansatz

$$u_{\pm}(K) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm iKx} \left\{ \alpha_{\pm}(K) j_0(x) + \beta_{\pm}(K) j_1(x) + \gamma_{\pm}(K) F_{01}(x) \right\} \quad (4.43)$$

können deshalb die Eigenwertgleichungen

$$[H, u_{\pm}(K)] = \pm \omega_K u_{\pm}(K) \quad \omega_K \geq 0 \quad (4.44)$$

$$[P, u_{\pm}(K)] = \pm K u_{\pm}(K)$$

gelöst werden. Eine kurze Rechnung ergibt

$$\alpha_{\pm}(K) = - \frac{K}{\omega_K} \beta_{\pm}(K) \quad (4.45)$$

$$\gamma_{\pm}(K) = \mp i \frac{g}{2\pi \omega_K} \beta_{\pm}(K)$$

mit

$$\omega_K = \sqrt{K^2 + g^2/(2\pi)} \quad (4.46)$$

Da alle Kommutatoren von j_0, j_1 und F_{01} reine c-Zahlen sind, kann $\beta_{\pm}(K)$ so gewählt werden, daß u_{+} und u_{-} als Erzeuger und Vernichter eines freien Bosons der Masse $\frac{|g|}{\sqrt{2\pi}} = \frac{|e|}{\sqrt{\pi}}$ interpretiert werden können. Tatsächlich liefert $\beta_{\pm}(K) = \sqrt{2\pi}$

$$[u_{\pm}(K), u_{\pm}(K')] = 0 \quad (4.47)$$

$$[u_{-}(K), u_{+}(K')] = (2\pi) 2 \omega_K \delta(K-K')$$

Das von $u_{+}(K)$ aus dem Vakuum erzeugte Boson ist natürlich genau Schwingers massives Photon. Der in (4.43) verwandte Ansatz für $u_{\pm}(K)$ ist übrigens nicht eindeutig. Solange man $u_{\pm}(K)$ nur auf physikalische Zustände anwendet, kann man nämlich deren Eichinvarianz ausnutzen und ein beliebiges Vielfaches von

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx G(x) e^{\pm iKx} = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\pm iKx} \left[g j_0(x) \mp iK F_{01}(x) \right] \quad (4.48)$$

zu $u_{\pm}(k)$ addieren, ohne die physikalischen Eigenschaften der Erzeuger und Vernichter zu ändern. Auf diese Weise kann man ein beliebiges Verhältnis der Koeffizienten von j_0 und j_1 in $u_{\pm}(k)$ erreichen, und diese Tatsache werden wir im nächsten Kapitel bei der weiteren Analyse der masselosen QCD_2 ausnutzen.

An dieser Stelle können wir die Lösung des Schwinger Modells noch nicht auf die nichtabelsche Theorie erweitern, da dann in den Kommutatoren $[H, j_{\mu}^a(x)]$ kovariante anstelle von normalen Ableitungen auftauchen, die durch eine partielle Integration nicht eliminiert werden können. Diese Schwierigkeit ist natürlich direkt mit der Tatsache verknüpft, daß eine direkte Verallgemeinerung von (4.43) auf die $SU(N)$ -Theorie zu eichvarianten Operatoren führt, die keine physikalischen Zustände aus dem Vakuum erzeugen können.

5. MESONISCHE BINDUNGSZUSTÄNDE II

Wir können uns nun der Aufgabe zuwenden, exakte Eigenzustände zu Impuls und Energie zu konstruieren, die nicht reine $U(1)$ -Zustände sind, d.h. deren Dynamik nicht allein durch H_2 gegeben ist. Dazu werden wir den im dritten Kapitel bei der störungstheoretischen Analyse verwandten Ansatz für mesonische Bindungszustände

$$|M\rangle = \int d\gamma_1 d\gamma_2 \bar{q}(\gamma_1) f(\gamma_1, \gamma_2) P_{\gamma_1}^{\gamma_2} q(\gamma_2) |\Omega\rangle \quad (5.1)$$

geeignet verallgemeinern.

Das Hauptproblem besteht darin, daß der zur Bildung nichtlokaler aber eichinvarianter Operatoren notwendige Stringoperator P_x^y kein einfaches Verhalten unter Zeittranslationen hat. Kommutiert man ihn mit dem Hamiltonoperator, so erhält man Einschübe von neuen Operatoren in den String, die vom ursprünglichen Ansatz wegführen. Im Abschnitt 3.1 konnten wir diese Einschübe nur eliminieren, indem wir uns im Hilbertraum auf den Unterraum eines einzigen Quark-Antiquark-Paares beschränkten. Das zugrundeliegende physikalische Bild ist klar: bei schwacher Kopplung kann man

Mesonen als nichtrelativistischen Bindungszustand der Valenzquarks betrachten und Modifikationen des Vakuums, d.h. Beiträge der "Seepartonen" vernachlässigen⁽³⁷⁾.

Um auch die Partonen des Sees zu berücksichtigen, werden wir in (5.1) den String P_x^y durch einen modifizierten String $P(0)_x^y$ ersetzen (vgl. dazu die Diskussion in Abschnitt 2.1). Das Problem der Operatoreinschübe in den String werden wir dadurch zwar nicht los, aber man kann nun versuchen, den Operator $O(z) = \frac{\lambda^a}{2} O^a(z)$ so zu wählen, daß der Kommutator mit H einen Operatoreinschub erzeugt, der sich wie ein Vernichtungsoperator verhält, und damit eliminiert werden kann, indem man ihn nach rechts kommutiert, wo er in (5.1) das Vakuum $|\Omega\rangle$ vernichtet. Diese Idee soll im ersten Abschnitt dieses Kapitels präzisiert werden. Anschließend werden wir diese Vernichtungsoperatoren benutzen, um exakte Energieeigenzustände zu konstruieren.

5.1. Eichvariante Vernichtungsoperatoren

Kommutiert man H mit dem modifizierten String, so erhält man mit Gl.(2.16)

$$[H, P(0)_{y_1}^{y_2}] = \int_{y_1}^{y_2} dx P(0)_{y_1}^x [H, -ig(A_1(x) + O(x))] P(0)_x^{y_2} \quad (5.2)$$

Um den Operatoreinschub eliminieren zu können, muß er zwei Bedingungen erfüllen:

- i) Es muß möglich sein, $[H, A_1^a(x) + O^a(x)]$ so nach rechts zu kommutieren, daß nur ein c-Zahl-Kommutator zurückbleibt.
- ii) Der Operatoreinschub, der nun rechts neben dem String steht, muß als Linearkombination von Operatoren mit negativer Frequenz geschrieben werden können, so daß er das Vakuum vernichtet.

Die entscheidende Aufgabe besteht nun darin, hinreichende Bedingungen zu finden, die ein Operator in einem komplizierten Operatorprodukt erfüllen muß, damit er sich wie ein Vernichtungsoperator verhält. Dazu betrachten

wir zunächst den trivialen Fall eines freien Feldes mit Erzeugern und Vernichtern $a^\dagger(k)$ und $a(k)$. Ein beliebiges Produkt $a^\dagger(k_1) \dots a^\dagger(k_n) a(q)$ vernichtet den Zustand niedrigster Energie, das Vakuum, weil die Eigenwertgleichung $[H, a(q)] = -\omega(q) a(q)$ (mit $\omega > 0$) $a(q)$ als einen Operator mit negativer Frequenz identifiziert. Wir können diese Tatsache auch etwas anders formulieren: multipliziert man ein gegebenes Produkt von Operatoren mit $a(q)$, so wird hierdurch die Energie des Systems um den endlichen Betrag $\omega(q)$ erniedrigt, die Zeitentwicklung des ursprünglichen Produkts ansonsten aber nicht verändert.

In dieser Form können wir die Verallgemeinerung auf wechselwirkende Theorien vornehmen. Insbesondere in einer Eichtheorie identifizieren wir einen Operator $U^a(x)$ als eichvarianten Vernichtungsoperator, indem wir

$$[H, \bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_x^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) U^a(x)] \quad (5.3)$$

mit

$$[H, \bar{q}(\gamma_1) P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} q(\gamma_2)] \quad (5.4)$$

vergleichen. Wenn der U-Einschub in den String die Energie des Systems um den endlichen Betrag E erniedrigt, die Zeitentwicklung des ursprünglichen Systems ansonsten aber nicht verändert, projiziert der String den Operator $U^a(x)$ auf die negative Frequenz $-E$, und damit verschwindet

$$\bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_x^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) U^a(x) |\Omega\rangle \quad (5.5)$$

da U direkt auf das Vakuum wirkt.

Im allgemeinen hängen U und O voneinander ab und wir benötigen einen Ansatz für beide, so daß $[H, A_i^a(x) + O^a(x)]$ als Linearkombination von U_E 's zu verschiedenen Eigenwerten $-E$ geschrieben werden kann. Offensichtlich muß U das farbelektrische Feld F_{01} enthalten, und damit bietet es sich an, U analog zum Vernichtungsoperator $U_-(k)$ des Schwinger Modells zu konstruieren. Das Auftauchen kovarianter Ableitungen in $[H, j_\mu^a(x)]$ bereitet nun keine Schwierigkeiten, da $U^a(x)$ in einen String eingebettet ist (vgl.

Gl.(2.17)), und deshalb wählen wir für U den Ansatz

$$U^a(x) = \alpha(x) \{ j_0^a(x) + \kappa j_1^a(x) \} + \gamma(x) F_{01}^a(x) \quad (5.6)$$

wobei die Koeffizientenfunktionen $\alpha, \beta = \kappa \alpha$ und γ diagonale 2×2 Spinor-Matrizen sind. Wegen der chiralen Invarianz der masselosen Theorie kann U^a als diagonal in Spinorindizes gewählt werden. Ebenso kann wegen der im Zusammenhang mit Gl.(4.46) diskutierten Eichfreiheit von $U_+^a(K)$ das Verhältnis der Koeffizienten von j_0 und j_1 fixiert werden. Wir verlangen hier $\kappa^2 = 1$, d.h. $\kappa = \pm 1$ oder $\kappa = \pm \gamma_5$.

Als Ansatz für O bietet sich nun ebenfalls eine allgemeine Linearkombination von j_0, j_1 und F_{01} an, allerdings wird eine akzeptable Definition des modifizierten Strings $P(O)$ dann sehr schwierig. Betrachtet man nämlich die in der algebraischen Definition des Strings ((2.11) und (2.12)) vorkommenden Operatorprodukte, so stellt man fest, daß eine beliebige Zahl von Operatoren $A_1(x)$ und $O(x)$ sich beliebig nahe kommen kann. Für A_1 und F_{01} bereitet dies keine Probleme, da die entsprechenden Wightman-Funktionen für kurze Abstände höchstens logarithmisch divergieren, wie wir im Abschnitt 2.2 gesehen haben. Eine logarithmische Divergenz aber wird durch die in (2.11) auftretenden Integrationen stets neutralisiert. In der Operatorproduktentwicklung zweier Ströme treten dagegen quadratisch divergente c-Zahl- und linear divergente Operatorterm auf, die zusammen mit dem nichtabelschen Charakter der Strings zu einer sehr komplizierten Struktur führen.

Glücklicherweise genügt der Ansatz

$$O^a(x) = C(\gamma_1 - x, \gamma_2 - x) F_{01}^a(x) = C(x) F_{01}^a(x) \quad (5.7)$$

um

$$[H, A_1^a(x) + O^a(x)] = -i F_{01}^a(x) + ig C(x) j_1^a(x)$$

auf den Ansatz für U abzubilden. Man kann nämlich stets noch eine "Eichtransformation" durchführen, um das zusätzliche j_0^a zu erzeugen. Wir

werden nun die Ansätze (5.6) und (5.7) benutzen, um die Bedingungen für die Koeffizientenfunktionen α und γ zu finden, die U als Vernichtungsoperator charakterisieren.

Zum Vergleich von (5.3) und (5.4) genügt es zunächst, $[H, U^a(x)]$ zu betrachten. Zusätzliche Terme bei x, die als Randterme von partiellen Integrationen auftauchen, sollen anschließend behandelt werden. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} & \bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_{\gamma_1}^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) [H, U^a(x)] |\Omega\rangle \\ &= \bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_{\gamma_1}^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) (-i\kappa) \left\{ D_1 U - (j_0 + \kappa j_1) (\partial_x \alpha + g\gamma) \right. \\ & \quad \left. + F_{01} (\partial_x \gamma + \frac{g}{2\pi} \alpha) \right\}^a(x) |\Omega\rangle \\ &+ \bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx \frac{d}{dx} \left[P(0)_{\gamma_1}^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) 2i\kappa (\gamma F_{01})^a(x) \right] |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (5.8)$$

wobei auf der rechten Seite zweimal Null zu $[H, U^a(x)]$ addiert wurde: in der Gestalt des Gauss'schen Gesetzes $G^a(x) |\Omega\rangle = 0$ und unter Ausnützung der Tatsache, daß die partielle Integration von $D_1(\gamma F_{01})(x)$ nur einen Randterm (den letzten Term auf der rechten Seite) ergibt. Die Gleichung (B.10) im Anhang B erlaubt nun, $D_1 U$ partiell zu integrieren, und so erhält man für (5.8)

$$\begin{aligned} & \bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_{\gamma_1}^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) (-i\kappa) \left\{ -ig^2 \frac{N}{4} \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \gamma_1) C U \right. \\ & \quad \left. - (j_0 + \kappa j_1) (\partial_x \alpha + g\gamma) + F_{01} (\partial_x \gamma + \frac{g}{2\pi} \alpha) \right\}^a(x) |\Omega\rangle \\ &+ \bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_{\gamma_1}^x g\kappa \left[O(x), \frac{\lambda^a}{2} \right] P(0)_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) U^a(x) |\Omega\rangle \\ &+ \bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx \frac{d}{dx} \left[P(0)_{\gamma_1}^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) (-i\kappa) (\alpha(j_0 + \kappa j_1) - \gamma F_{01})^a(x) \right] |\Omega\rangle \end{aligned} \quad (5.9)$$

Weiter unten werden wir sehen, daß nur der erste Term beiträgt. $-i\kappa \{ \}$ muß deshalb mit $-EU$ identifiziert werden, damit sich U wie ein Operator verhält, der auf die negative Frequenz $-E$ projiziert worden ist. Vergleich der Koeffizienten von $j_0 + \kappa j_1$ und F_{01} liefert die Eigenwertgleichung

$$\begin{aligned} i\kappa E \alpha(x) &= \left[\partial_x + ig^2 \frac{N}{4} \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \gamma_1) C(x) \right] \alpha(x) + g\gamma(x) \\ i\kappa E \gamma(x) &= \left[-\partial_x + ig^2 \frac{N}{4} \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \gamma_1) C(x) \right] \gamma(x) - \frac{g}{2\pi} \alpha(x) \end{aligned} \quad (5.10)$$

und wir haben damit die gesuchten Bedingungen an U gefunden: wenn die Koeffizientenfunktionen α und γ die Eigenwertgleichung (5.10) mit noch zu bestimmenden Randbedingungen erfüllen, verhält sich $U(x)$ als eichvarianter Vernichtungsoperator.

Als nächstes muß gezeigt werden, daß der zweite und der dritte Term in (5.9) tatsächlich keinen Beitrag liefern. Um den zweiten Term eliminieren zu können, verlangen wir, daß $0(x)$ an den Randpunkten y_1 und y_2 verschwindet, d.h.

$$C(\gamma_1) = C(\gamma_2) = 0 \quad (5.11)$$

Der zweite Term in (5.9) kann damit als Randterm einer partiellen Integration geschrieben werden (vgl. (2.17))

$$\begin{aligned} & \bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_x^x \left[g x 0(x), \frac{\lambda^a}{2} \right] P(0)_x^{\gamma_2} q(\gamma_2) U^a(x) | \Omega \rangle \\ &= \bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx \left\{ \int_{\gamma_1}^x dz P(0)_{\gamma_1}^z (D_1 g x 0)(z) P(0)_z^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} \right. \\ & \quad \left. + \int_x^{\gamma_2} dz P(0)_x^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^z (D_1 g x 0)(z) P(0)_z^{\gamma_2} \right\} q(\gamma_2) U^a(x) | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die gleiche Struktur, nämlich Einschübe von zwei Operatoren, von denen einer $U^a(x)$ ist, taucht auch in

$$\bar{q}(\gamma_1) \left[H, P(0)_{\gamma_1}^x \frac{\lambda^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} \right] q(\gamma_2) U^a(x) | \Omega \rangle \quad (5.13)$$

auf. Zum Vergleich der vollen Kommutatoren mit H , (5.3) und (5.4), addiert man deshalb (5.12) und (5.13) und vergleicht die Summe mit

$$\bar{q}(\gamma_1) \left[H, P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} \right] q(\gamma_2) | \Omega \rangle \quad (5.14)$$

Den zu (5.12) analogen Term in (5.14) erhält man, indem man in (5.12) den U -Einschub fortläßt. Man erhält so

$$\bar{q}(\gamma_1) \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dz P(0)_{\gamma_1}^z (D_1 g x 0)(z) P(0)_z^{\gamma_2} q(\gamma_2) | \Omega \rangle \quad (5.15)$$

Wegen der Randbedingung (5.11) verschwindet dieser Term aber identisch.

Damit können wir die Argumentation nun umkehren: beim Vergleich von (5.3) und (5.4) können wir stets (5.15) von (5.4) subtrahieren, ohne etwas zu verändern. Der analoge Schritt bei (5.3) führt jedoch zu Randtermen am Ort x des U-Einschubs, die genau durch das negative von (5.12) gegeben sind und damit den unerwünschten zweiten Term in (5.9) eliminieren.

Der Stromanteil des dritten Terms in (5.9), der ein reiner Randterm ist, kann durch Einführung der angezogenen Quarkfelder des Abschnitts 4.2 eliminiert werden. Dazu fügt man in die Ausdrücke (5.3) bis (5.15) zunächst die Spinormatrix

$$\gamma_0 \Gamma_\varepsilon = \gamma_0 \frac{1}{2} (11 + \varepsilon \gamma_5) \quad , \varepsilon = \pm 1 \quad (5.16)$$

ein, d.h. man betrachtet

$$q_\alpha^+(\gamma_1) P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} q_\alpha(\gamma_2) \quad (5.17)$$

mit $\alpha = 1$ für $\varepsilon = +1$ und $\alpha = 2$ für $\varepsilon = -1$ anstelle von

$$\bar{q}(\gamma_1) P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} q(\gamma_2) \quad (5.18)$$

$q_\alpha(y)$ bzw. $q_\alpha^+(y)$ ersetzt man nun durch eines der angezogenen Quarkfelder $Q_\alpha^{(p)}(y)$ bzw. $Q_\alpha^{(p)+}(y)$. Bis auf die Ersetzung der Generatoren $\frac{\lambda^a}{2}$ der fundamentalen Darstellung durch die Generatoren $\frac{\tilde{\lambda}^a}{2}$ der Darstellung Λ_p im String $P(0)$ hat dies keinen Einfluß auf die bisherige Diskussion. Als nächstes wählt man

$$\alpha = +\gamma_5 \quad (5.19)$$

im Ansatz für U (effektiv kann man $\alpha = \gamma_5 = \varepsilon$ setzen) und ersetzt die diagonalen Spinormatrizen α und γ durch ihre Komponenten. Damit geht der dritte Term in (5.9) über in

$$\begin{aligned} & \left\{ +i\varepsilon Q_\alpha^{(p)+}(\gamma_1) \left[\alpha(\gamma_1) (j_0 + (\gamma_5)_{\alpha\alpha} j_1)(\gamma_1) - \gamma(\gamma_1) F_{01}(\gamma_1) \right] P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} Q_\alpha^{(p)}(\gamma_2) \right. \\ & \left. - i\varepsilon Q_\alpha^{(p)+}(\gamma_1) P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} \left[\alpha(\gamma_2) (j_0 + (\gamma_5)_{\alpha\alpha} j_1)(\gamma_2) - \gamma(\gamma_2) F_{01}(\gamma_2) \right] Q_\alpha^{(p)}(\gamma_2) \right\} | \Omega \rangle \end{aligned} \quad (5.20)$$

Gemäß (4.36) verschwinden die Stromrandterme, so daß wir nur noch

$$\gamma(\gamma_1) = \gamma(\gamma_2) = 0 \quad (5.21)$$

fordern müssen, um auch den dritten Term in (5.9) zu eliminieren.

Damit haben wir die Identifikation von U als eichvarianten Vernichtungsoperator abgeschlossen: $U^a(x)$ eingebettet in den modifizierten String in

$$Q^{(p)+}_2(\gamma_1) P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} Q^{(p)}_2(\gamma_2) \quad (5.22)$$

verhält sich genau dann als Vernichtungsoperator mit Frequenz $-E$, wenn die Koeffizientenfunktionen α und γ die Eigenwertgleichung (5.10) mit der Randbedingung (5.21) erfüllen.

5.2. Exakte Eigenzustände zu Energie und Impuls

Mit Hilfe der soeben gefundenen Vernichtungsoperatoren sollen nun Eigenzustände des Hamilton- und des Impulsoperators konstruiert werden. Der Ansatz, den wir hierfür verwenden müssen, ist inzwischen klar: wir betrachten Zustände, die von Operatoren der Form

$$M = M^{(p)}(\varepsilon) = \int d\gamma_1 d\gamma_2 f(\gamma_1, \gamma_2) Q^{(p)+}_1(\gamma_1) \Gamma_\varepsilon P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} Q^{(p)}_2(\gamma_2) \quad (5.23)$$

aus dem Vakuum erzeugt werden, wobei $O^a(x)$ wie bisher durch $C(x)F^a_{01}(x)$ gegeben ist. Im Gegensatz zum störungstheoretischen Fall können wir uns wegen der chiralen Invarianz der masselosen Theorie auf Operatoren beschränken, die nur mit einer chiralen Komponente des Quarkfeldes gebildet werden, die durch die Projektionsmatrix Γ_ε ($\varepsilon = \pm 1$) bestimmt wird.

Der Kommutator $[P, M]$ ist leicht zu berechnen. Man findet das gleiche Ergebnis wie in (3.12), wobei nun jedoch auf die Abhängigkeit der Koeffizientenfunktion $C(x) \equiv C(y_1 - x, y_2 - x)$ von den Randpunkten y_1 und y_2 geachtet werden muß. Wählt man

$$f(\gamma_1, \gamma_2) = e^{iK(\gamma_1 + \gamma_2)/2} \hat{f}(\gamma_1 - \gamma_2) \quad (5.24)$$

so erzeugt M folglich Impulseigenzustände zum Eigenwert K.

Als nächstes betrachten wir den Kommutator von H und M

$$\begin{aligned} [H, M] = & -i \int d\gamma_1 d\gamma_2 f(\gamma_1, \gamma_2) \left\{ -Q^{(p)+}(\gamma_1) \overleftarrow{D}_1 \gamma_5 \Gamma_\varepsilon P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} Q^{(p)}(\gamma_2) \right. \\ & + Q^{(p)+}(\gamma_1) \Gamma_\varepsilon \gamma_5 P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} \overrightarrow{D}_1 Q^{(p)}(\gamma_2) \\ & \left. + Q^{(p)+}(\gamma_1) \Gamma_\varepsilon \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_{\gamma_1}^x (-ig) [F_{01}(x) - g C(x) j_1(x)] P(0)_x^{\gamma_2} Q^{(p)}(\gamma_2) \right\} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Eliminiert man die kovarianten Ableitungen in (5.25) wie bisher durch partielle Integration, so erhält man einen zusätzlichen Operatoreinschub in den String (proportional $\partial_{\gamma_1(2)} C(\gamma_1-x, \gamma_2-x) F_{01}(x)$), da man die Abhängigkeit der Koeffizientenfunktion von den Randpunkten berücksichtigen muß:

$$\begin{aligned} [H, M] = & \int d\gamma_1 d\gamma_2 \left[i\varepsilon (\partial_{\gamma_1} + \partial_{\gamma_2}) f(\gamma_1, \gamma_2) \right] Q^{(p)+}(\gamma_1) \Gamma_\varepsilon P(0)_{\gamma_1}^{\gamma_2} Q^{(p)}(\gamma_2) \\ & - \int d\gamma_1 d\gamma_2 f(\gamma_1, \gamma_2) Q^{(p)+}(\gamma_1) \Gamma_\varepsilon \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_{\gamma_1}^x g [F_{01} - g C j_1 \\ & - \varepsilon (\partial_{\gamma_1} + \partial_{\gamma_2}) C F_{01}] (x) P(0)_x^{\gamma_2} Q^{(p)}(\gamma_2) \\ = & -\varepsilon K M - \varepsilon g \int d\gamma_1 d\gamma_2 f(\gamma_1, \gamma_2) Q^{(p)+}(\gamma_1) \Gamma_\varepsilon \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(0)_{\gamma_1}^x \otimes \\ & \otimes [F_{01}(x) (\varepsilon + 2 \partial_x C(x)) - g C(x) (j_0 + x j_1)(x) + C(x) G(x)] P(0)_x^{\gamma_2} Q^{(p)}(\gamma_2) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Im zweiten Schritt haben wir einen $D_1(C(x)F_{01}(x))$ Einschub durch partielle Integration eliminiert. Dies ist nur möglich, da wir bereits in Gleichung (5.11) verlangt haben, daß $C(x)$ bei y_1 und y_2 verschwindet. Ohne diese Bedingung würden in (5.26) Randterme der Form $C(y)F_{01}(y)$ auftauchen, und die Notwendigkeit, diese Randterme zu eliminieren, kann als unabhängige Ableitung der Randbedingung (5.11) angesehen werden.

Die eckige Klammer in (5.26) hat bereits die kanonische Form der Vernichtungsoperatoren U, wenn wir zeigen können, daß der Erzeuger lokaler Eichtransformationen $G(x)$ in (5.26) nichts beiträgt, sobald $[H, M]$ auf physikalische Zustände angewandt wird. Dazu betrachten wir das Verhalten von $P(0)_x^{\gamma_2} Q^{(p)}(\gamma_2)$ unter infinitesimalen Eichtransformationen. Es folgt

$$\left[\int d\gamma \mathcal{J}^b(\gamma) G^b(\gamma), P(0)_x^{\gamma_2} Q^{(p)}(\gamma_2) \right] = -g \mathcal{J}^b(x) \frac{\tilde{\lambda}^b}{2} P(0)_x^{\gamma_2} Q^{(p)}(\gamma_2) \quad (5.27)$$

Setzt man nun $\mathcal{J}^b(y) = \delta^{ab} \frac{1}{2} (\delta(x-y+\varepsilon) + \delta(x-y-\varepsilon))$, so verschwindet (5.27) für jedes endliche ε . Andererseits geht die linke Seite für $\varepsilon \rightarrow 0$ genau in die Definition von $[G^a(x), P(0)_x^{1/2} Q^{(p)}(y_2)]$ mittels symmetrischem Limes über (vgl. (3.16)). Auf diese Weise erhält man

$$[G^a(x), P(0)_x^{1/2} Q^{(p)}(y_2)] = 0 \quad (5.28)$$

und deshalb kann man den $G(x)$ -Term in (5.26) fortlassen.

Der verbleibende Ausdruck in der eckigen Klammer in (5.26)

$$F_{01}(x) (\varepsilon + 2 \partial_x C(x)) - g C(x) (j_0 + \kappa j_1)(x) \quad (5.29)$$

kann nicht direkt mit einem Vernichtungsoperator $U_E(x)$ mit fester Frequenz $-E$ identifiziert werden. Wegen der Randbedingungen (5.11) und (5.21) müßten nämlich beide Koeffizientenfunktionen α_E und γ_E am Rand verschwinden, und damit kann die Differentialgleichung (5.10) nicht mehr gelöst werden. Stattdessen müssen wir fordern, daß (5.29) als Linearkombination von Vernichtungsoperatoren U_E geschrieben werden kann, und damit erhalten wir die Bedingung

$$\begin{aligned} -g C(x) &= \sum_{E>0} a_E \alpha_E(x) \\ \varepsilon + 2 \partial_x C(x) &= \sum_{E>0} a_E \gamma_E(x) \end{aligned} \quad (5.30)$$

wobei die a_E freie Parameter sind.

Wendet man (5.26) auf das Vakuum an, so kann man die eckige Klammer durch einen Kommutator ersetzen. Eine kurze Rechnung (vgl. Anhang B) ergibt

$$\begin{aligned} &[s(x) (j_0^a(x) + \kappa j_1^a(x)) + \tau(x) F_{01}^a(x), P(0)_x^{1/2} Q^{(p)}(y_2)] \\ &= \frac{g}{2} \operatorname{sgn}(y_2 - x) \left[\frac{g}{2\pi} \kappa s(x) C(x) - \tau(x) \right] \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(0)_x^{1/2} Q^{(p)}(y_2) \end{aligned} \quad (5.31)$$

für eine beliebige Linearkombination von $j_0 + \kappa j_1$ und F_{01} , falls $s(y_2) = 0$

gilt. Am Ort x des Operatoreinschubs bleibt damit nur eine c -Zahl proportional

$$\frac{\tilde{\lambda}^a}{2} \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} = C_2(\Lambda_p) 11 \quad (5.32)$$

übrig, wobei $C_2(\Lambda_p)$ der Eigenwert des quadratischen Casimiroperators in der Darstellung Λ_p des angezogenen Quarkfeldes ist. Somit erhält man

$$\begin{aligned} [H, M]|\Omega\rangle &= -\varepsilon K M|\Omega\rangle + \int dy_1 dy_2 f(y_1, y_2) \otimes \\ &\otimes Q^{(p)+}(y_1) \Gamma_\varepsilon P(0)_{y_1}^{y_2} Q^{(p)}(y_2) |\Omega\rangle \otimes \\ &\otimes \frac{g^2}{2} \operatorname{sgn}(y_2 - y_1) \int_{y_1}^{y_2} dx \left[1 + 2\varepsilon \frac{d}{dx} C(x) + \frac{g^2}{2\pi} C(y_1 - x, y_2 - x) \right] C_2(\Lambda_p) \end{aligned} \quad (5.33)$$

und damit ist die am Anfang dieses Abschnitts gestellte Aufgabe im wesentlichen gelöst.

Da in (5.33) keine Ableitungen nach der Länge $L = y_2 - y_1$ des Strings vorkommen, kann $\hat{f}(y_1 - y_2)$ proportional zu einer δ -Funktion gewählt werden, die L fixiert

$$\hat{f}(y_1 - y_2) = c_f \delta(y_1 - y_2 + L) \quad (5.34)$$

Das letzte Integral in (5.33) ist unabhängig von $y_1 + y_2$, und damit können wir (5.33) umschreiben in eine Eigenwertgleichung für die Energieeigenzustände

$$|M(K, p, L, \varepsilon)\rangle = c_f \int dy e^{iK(y + \frac{L}{2})} Q^{(p)+}(y) \Gamma_\varepsilon P(0)_y^{y+L} Q^{(p)}(y+L) |\Omega\rangle \quad (5.35)$$

nämlich

$$H |M(K, p, L, \varepsilon)\rangle = E_M |M(K, p, L, \varepsilon)\rangle \quad (5.36)$$

mit dem Eigenwert

$$E_M = -\varepsilon K + \frac{g^2}{2} C_2(\Lambda_p) \left\{ |L| + \frac{g^2}{2\pi} \int_0^L dz C^2(z-L, z) \operatorname{sgn} L \right\} \quad (5.37)$$

Vorausgesetzt haben wir dabei natürlich, daß wir eine Lösung $C(x)$ der Gleichungssysteme (5.30) und (5.10) mit den Randbedingungen (5.11) und (5.21) bereits kennen. Bevor wir das durch (5.37) gegebene Mesonspektrum

diskutieren können, muß dieses System von Gleichungen, die wir "Bindungsgleichungen" nennen wollen, etwas näher betrachtet werden.

5.3. Analyse der Bindungsgleichungen

Um die Bindungsgleichungen zu untersuchen, schreiben wir sie zunächst in dimensionslose Größen um. Dazu ersetzen wir x durch

$$t = 2\pi \left[\theta(\varepsilon L) \frac{x-y_1}{L} - \theta(-\varepsilon L) \frac{x-y_2}{L} \right] ; t \in [0, 2\pi] \quad (5.38)$$

und betrachten

$$\lambda = \frac{E |L|}{2\pi} \quad (5.39)$$

$$R = \frac{g |L|}{(2\pi)^{3/2}}$$

anstelle von E und L . Die Koeffizientenfunktion $C(x)$ wird ersetzt durch

$$V(t) = \frac{\varepsilon g^2 L}{8\pi} C(x(t)) \quad (5.40)$$

und damit erhält z.B. Gleichung (5.37) die Form

$$E_M = -\varepsilon K + \frac{g}{2} C_2(\Lambda_P) \left\{ (2\pi)^{3/2} R + \frac{16}{(2\pi)^{3/2} R} \int_0^{2\pi} V^2(t) dt \right\} \quad (5.41)$$

Um die Eigenwertgleichung (5.10) in eine symmetrische Form zu bringen, betrachten wir $\psi_\lambda = -i\varepsilon \alpha_E$ und $\chi_\lambda = \sqrt{2\pi} \gamma_E$ und erhalten

$$\begin{aligned} -\lambda \psi_\lambda(t) &= \left(i \frac{d}{dt} - NV(t) \right) \psi_\lambda(t) + R \chi_\lambda(t) \\ -\lambda \chi_\lambda(t) &= \left(-i \frac{d}{dt} - NV(t) \right) \chi_\lambda(t) + R \psi_\lambda(t) \end{aligned} \quad (5.42)$$

Dies ist genau die stationäre Form der Diracgleichung eines Teilchens der Masse R im elektrostatischen Potential $-NV$. Die Randbedingungen (5.21) $\chi_\lambda(0) = \chi_\lambda(2\pi) = 0$ führen zur Quantisierung der Eigenwerte. Dies rechtfertigt die diskrete Summe über die Energieeigenwerte in Gleichung (5.30), die nun umgeschrieben werden kann in

$$i V(t) = \sum_{\lambda > 0} b_{\lambda} \psi_{\lambda}(t) \quad (5.43)$$

$$\frac{\pi}{2} R \operatorname{sgn}(\varepsilon L) + \frac{2}{R} \frac{d}{dt} V(t) = \sum_{\lambda > 0} b_{\lambda} \chi_{\lambda}(t)$$

mit $b_{\lambda} = a_{\varepsilon} \frac{g L}{8\pi}$, und die Randbedingung (5.11) lautet jetzt

$$V(0) = V(2\pi) = 0 \quad (5.44)$$

Die Gleichungen (5.42) und (5.43) werden übersichtlicher, wenn man anstelle der Eigenmoden $(\psi_{\lambda}, \chi_{\lambda})$ der Diracgleichung (5.42) die beiden Funktionen

$$\begin{aligned} f(s, t) &= \sum_{\lambda > 0} b_{\lambda} e^{-\lambda s} \psi_{\lambda}(t) \\ g(s, t) &= \sum_{\lambda > 0} b_{\lambda} e^{-\lambda s} \chi_{\lambda}(t) \end{aligned} \quad (5.45)$$

betrachtet. (5.42) impliziert ein Paar partieller Differentialgleichungen (pDG) für f und g im Streifen $s \geq 0, t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} (\partial_s - i\partial_t + N V(t)) f(s, t) &= R g(s, t) \\ (\partial_s + i\partial_t + N V(t)) g(s, t) &= R f(s, t) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Offensichtlich müssen f und g für große s exponentiell abfallen, und Gl. (5.43) und die Randbedingungen an die χ_{λ} ergeben Randbedingungen für f und g bei $s = 0$ und, für $s > 0$, bei $t = 0, 2\pi$

$$\begin{aligned} f(0, t) &= i V(t) \\ g(0, t) &= \frac{\pi}{2} R \operatorname{sgn}(\varepsilon L) + \frac{2}{R} \frac{d}{dt} V(t) \\ g(s, 0) &= 0 \\ g(s, 2\pi) &= 0 \end{aligned} \quad (5.47a-d)$$

Die ursprünglichen Bindungsgleichungen sind also äquivalent zu einer Randwertaufgabe für die pDG (5.46), und diese Randwertaufgabe soll nun näher untersucht werden.

Ersetzt man in der pDG mit Hilfe von (5.47a) $V(t)$ durch $f(0,t)$, so erkennt man sofort den nichtlinearen und nichtlokalen Charakter des Problems für $N \neq 0$. Der Versuch einer analytischen Lösung der Randwertaufgabe ist damit für den nichtabelschen Fall ziemlich hoffnungslos. Im abelschen Fall, d.h. im Schwinger Modell muß N durch Null ersetzt werden (vgl. Anhang B), und damit wird die pDG sehr einfach, das Randwertproblem gleichzeitig aber unlösbar.

Entwickelt man nämlich f und g in eine Fourierreihe in t , so sieht man leicht, daß die allgemeinste reguläre Lösung von (5.46) (mit exponentiellem Abfall für große s) im Fall $N = 0$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} f(s,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp[-\sqrt{n^2+R^2}s + i n t] \\ g(s,t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n \exp[-\sqrt{n^2+R^2}s + i n t] \end{aligned} \quad (5.48)$$

mit

$$f_n = -g_n (n + \sqrt{n^2+R^2})/R \quad (5.49)$$

Andererseits implizieren die Randbedingungen (5.47a,b)

$$\begin{aligned} \delta_{n,0} \frac{\pi}{2} R \operatorname{sgn}(\varepsilon L) &= g_n - \frac{2n}{R} f_n \\ &= g_n \left(\frac{n + \sqrt{n^2+R^2}}{R} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.50)$$

Für $n \neq 0$ folgt $g_n = 0$ und damit

$$g(s,t) = \frac{\pi}{2} R \operatorname{sgn}(\varepsilon L) e^{-Rs} \quad (5.51)$$

was im Widerspruch zu den Randbedingungen (5.47c,d) steht.

Dieses Resultat ist durchaus zufriedenstellend. Eine Lösung hätte nämlich die Existenz neuer Teilchen im Spektrum des Schwinger Modells bedeutet, von dem man jedoch weiß, daß es nur ein freies Boson der Masse $\frac{e}{\sqrt{\mu}}$ beschreibt⁽⁵⁾. Der Nachweis, daß kein Widerspruch zum bekannten Verhalten des Schwinger Modells auftritt, kann als wichtige Konsistenzprüfung der bisherigen Ergebnisse dieses Kapitels gewertet werden.

Andererseits stellt sich nun die Frage, ob für $N \neq 0$ Lösungen der Randwertaufgabe existieren können. Die beiden Fälle $N = 0$ und $N \neq 0$ sind jedoch qualitativ so verschieden, daß die Existenz von Lösungen für die QCD_2 sehr wahrscheinlich ist. Um diese Unterschiede zu sehen, schreibt man (5.46) am besten als elliptische Differentialgleichung für $g(s,t)$

$$[\partial_s^2 + \partial_t^2 + 2NV(t)\partial_s - iNV'(t) + (NV(t))^2 - R^2]g(s,t) = 0 \quad (5.52)$$

mit Randbedingungen

$$g(0,t) = \frac{\pi}{2} R \operatorname{sgn}(\varepsilon L) + \frac{2}{R} \frac{d}{dt} V(t) \quad (5.53a,b)$$

$$g(s,0) = g(s,2\pi) = 0$$

und der zusätzlichen Bedingung, daß $g(s,t)$ für große s exponentiell abfällt. Gleichung (5.52) zusammen mit der Dirichlet-Randbedingung (5.53) besitzt Lösungen für eine große Klasse von Potentialen $V(t)$. V wird erst fixiert durch die zusätzliche Bedingung

$$iV(t) = \frac{1}{R} (\partial_s + i\partial_t + NV(t))g(s,t)|_{s=0} \quad (5.54)$$

die zu (5.47a) äquivalent ist. Schließlich führt (5.44) als weitere Bedingung an V im allgemeinen zur Quantisierung von $R = g|L|/(2\pi)^{3/2}$ und damit von L , der Länge des Strings.

Diese qualitative Darstellung der Randwertaufgabe zeigt, daß die zu lösenden Gleichungen keineswegs ein überbestimmtes System beschreiben. Die Tatsache, daß für $N = 0$ keine Lösung existiert, erscheint vielmehr als Zufall, der jedoch damit zusammenhängt, daß die Eigenmoden von (5.42) durch Variation von $V(t)$ nicht verändert werden können. Für $N \neq 0$ ist

genau dies möglich und hat wichtige Konsequenzen, wie man leicht anhand eines konstanten Potentials $V = A/N$ zeigen kann. Dazu wird $g(s,t)$ in die Eigenmoden von (5.52)

$$g_{n\pm}(s,t) = e^{-\lambda_{n\pm} s} \sin\left(\frac{n}{2} t\right) \quad ; n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.55)$$

mit

$$\lambda_{n\pm} = A \pm \sqrt{R^2 + \frac{n^2}{4}} \quad (5.56)$$

entwickelt. Für große positive A ist sowohl λ_{n+} als auch λ_{n-} positiv für $n < 2\sqrt{A^2 - R^2}$, und damit wird die Menge der Eigenmoden (5.55), die für große s exponentiell abfallen, am Rand $s = 0$ übervollständig. Umgekehrt fehlen für große negative A die $\sin\frac{n}{2}t$ mit niedrigem n und verhindern so die Lösung des Dirichletproblems (5.52/53). Damit wird auch klar, daß es für dieses Dirichletproblem weder allgemeine Existenz- noch Eindeutigkeitssätze geben kann, die von den speziellen Eigenschaften des Potentials $V(t)$ unabhängig sind. Verallgemeinert man das für konstante V gefundene Verhalten, so findet man, daß im allgemeinen mehrere Lösungen zu (5.52) und (5.53) existieren, wenn $NV(t)$ im Inneren des Intervalls $(0, 2\pi)$ groß und positiv gewählt wird. Der physikalische Grund hierfür ist, daß in diesem Fall Eigenlösungen der freien Diracgleichung (5.42) (mit $V \equiv 0$) zu positiver Energie (d.h. $\lambda < 0$) in den Bereich negativer Energien herangezogen werden. Die Menge der zu (5.55) analogen Eigenmoden der pDG (5.52), die bei $t = 0, 2\pi$ verschwinden, wird damit bei $s = 0$ übervollständig und erlaubt so mehrere Realisierungen der Randbedingung (5.53a)

$$g(0,t) = \frac{\pi}{2} R \operatorname{sgn}(\varepsilon L) + \frac{2}{R} \frac{d}{dt} V(t)$$

Auf diese Weise bedeutet die zusätzliche Bedingung an V

$$iV(t) = \frac{1}{R} (\partial_s + i\partial_t + NV(t)) g(s,t) \Big|_{s=0}$$

im nichtabelschen Fall eine wesentlich geringere Einschränkung als im Schwinger Modell, und deshalb sollte für die QCD_2 eine Lösung der Randwertaufgabe existieren.

5.4. Diskussion des Spektrums

Mit den Ergebnissen des letzten Abschnitts können wir nun von einer Lösung $V(t)$ der Bindungsgleichungen ausgehen, die zu reellen Energieeigenwerten E_M in (5.41) führt. Offensichtlich erhält man jedoch kein lorentzkovariantes Energie-Impuls-Spektrum, da die Bindungsgleichungen und damit auch $V(t)$ und R nicht vom Impulseigenwert K abhängen.

Nun hatten wir bei der Diskussion der Poincaré Invarianz der QCD_2 festgestellt, daß die Poincaré-Algebra nur bis auf zusätzliche operatorwertige Eichtransformationen, die von $\int dx A_1^a(x) G^a(x)$ erzeugt werden, geschlossen ist. Vor dem Versuch, die Form des Spektrums (5.41) zu verstehen, muß deshalb zunächst die Invarianz der Zustände $|M(K,p,L,\epsilon)\rangle$ unter diesen Operatoreichtransformationen gezeigt werden. Dazu betrachtet man die infinitesimale Form

$$[\int dx A_1^a(x) G^a(x), M] |\Omega\rangle \quad (5.57)$$

Die Anteile, die von den Kommutatoren mit $G^a(x)$ herrühren, können genau wie bei einer c-Zahl Eichtransformation behandelt werden und verschwinden daher. Damit reduziert sich (5.57) auf

$$\begin{aligned} & \int dx_1 dx_2 f(x_1, x_2) Q^{(p)+}(x_1) \Gamma_\epsilon \int_{x_1}^{x_2} dz P(0)_{x_1}^z (-ig) \\ & \int_{-\infty}^{\infty} dx [A_1^a(x), C(z) F_{01}(z)] G^a(x) P(0)_z^{x_2} Q^{(p)}(x_2) |\Omega\rangle \quad (5.58) \\ & = \int dx_1 dx_2 f(x_1, x_2) Q^{(p)+}(x_1) \Gamma_\epsilon \int_{x_1}^{x_2} dz P(0)_{x_1}^z g C(z) G(z) P(0)_z^{x_2} Q^{(p)}(x_2) |\Omega\rangle \end{aligned}$$

Terme genau dieser Form haben wir aber schon im Abschnitt 5.2 betrachtet und gefunden, daß sie identisch verschwinden (vgl. (5.28)). Die im Abschnitt 5.2 konstruierten Zustände gehören folglich zum poincaréinvarianten Sektor der QCD_2 . Die soeben angestellten Betrachtungen kann man leicht auf beliebige durch eichinvariante Operatoren aus dem Vakuum erzeugte Zustände verallgemeinern, womit die Poincaréinvarianz des physikalischen Sektors der QCD_2 manifest wird.

Die Energie-Impuls-Beziehung (5.41) muß also physikalische Ursachen haben, und die lineare Impulsabhängigkeit der Energie $E_M(K)$ führt sofort auf die richtige Spur. Die Poincarégeneratoren des $U(1)$ -Sektors kommutieren nämlich nicht mit den im Abschnitt 5.2 konstruierten Operatoren M .

Damit enthalten die Zustände $|M(K,p,L,\epsilon)\rangle$ masselose $U(1)$ -Teilchen, und deren Beitrag zur gesamten Energie des Zustands wird im allgemeinen von K abhängen und so ein lorentzkovariantes Spektrum verhindern.

Diese K -Abhängigkeit kann mit Hilfe von (4.27) identifiziert werden. Betrachtet man die Faktoren $B_\alpha^+(\gamma_2)$ bzw. $B_\alpha(\gamma_1)$ in $Q^{(p)}(\gamma_2)$ bzw. $Q^{(p)+}(\gamma_1)$ als vollständig dem $U(1)$ -Sektor zugehörig, so müssen die Beiträge zur Energie, die aus der partiellen Integration von

$$-i(\gamma_5)_{\alpha\alpha} \partial_\gamma B_\alpha^{(+)}(\gamma) = -i\epsilon \partial_\gamma B_\alpha^{(+)}(\gamma) \quad (5.59)$$

resultieren, voll zum $U(1)$ -Anteil der Energie gerechnet werden. Insbesondere erhält man auf diese Weise einen Summanden $-\epsilon K$ zur Energie und analog einen Summanden $+K$ zum Impuls des $U(1)$ -Anteils. Durch Variation von K werden also lediglich Energie und Impuls der $U(1)$ -Teilchen im Zustand $|M(K,p,L,\epsilon)\rangle$ verändert, während die massiven Teilchen, die in diesem Zustand enthalten sind und denen unser Interesse gilt, nicht berührt werden.

Weiter ist zu beachten, daß der Ansatz (5.23) für den Mesonoperator M nicht lorentzkovariant ist. Aus der expliziten Form des Generators infinitesimaler Schübe M^{01} im Kapitel 2 folgt nämlich, daß bei einer Lorentztransformation des modifizierten Strings zusätzliche j_1 - und j_0 -Einschübe erzeugt werden. Durch die Wahl des Ansatzes (5.7) für den modifizierten String $P(0)$ wurde also ein spezielles Inertialsystem für die durch $|M(K,p,L,\epsilon)\rangle$ beschriebenen massiven Teilchen ausgezeichnet.

Damit schält sich folgendes Bild für die im zweiten Abschnitt gefundenen Energieeigenzustände heraus: $|M(K,p,L,\epsilon)\rangle$ beschreibt ein massives Meson, das von einer Wolke von $U(1)$ -Teilchen umgeben ist. Diese $U(1)$ -Wolke als Ganzes ist masselos, da sie für festes ϵ nur aus einer einzigen chiralen Komponente des elementaren Quarkfeldes gebildet wird. Der Impuls k der $U(1)$ -Wolke ist durch

$$k = K + k_0 \quad (5.60)$$

gegeben, wobei k_0 von K unabhängig ist, und entsprechend ist $-\epsilon k$ die

Energie der U(1)-Wolke.

Spaltet man die U(1)-Wolke von $|M(K,p,L,\epsilon)\rangle$ ab, so erhält man ein nacktes Meson, das sich mit Impuls $-k_0$ bewegt und dessen Masse wir mit μ bezeichnen wollen. Die Energie dieses Mesons ist dann

$$E(k_0) = \sqrt{k_0^2 + \mu^2} \\ = \epsilon k_0 + \frac{g}{2} C_2(\Lambda_p) \left\{ (2\pi)^{3/2} R + \frac{16}{(2\pi)^{3/2} R} \int_0^{2\pi} V^2(t) dt \right\} \quad (5.61)$$

und hieraus ergibt sich die Masse μ , falls k_0 berechnet werden kann.

Im allgemeinen wird $|M(K,p,L,\epsilon)\rangle$ eine Superposition von Teilchen verschiedener Massen μ mit den zugehörigen U(1)-Wolken sein, und für jeden Summanden in dieser Superposition gilt (5.61) entsprechend. In diesem Fall ist $|M(K,p,L,\epsilon)\rangle$ nicht notwendig auch ein Eigenzustand des U(1)-Hamiltonoperators H_2 , was durch die Kommutatorrelation (4.42) tatsächlich nahegelegt wird. Um die Mesonmassen μ explizit zu berechnen, müssen zunächst die Bindungsgleichungen gelöst werden, und es muß ein Verfahren gefunden werden, die Impulseigenwerte k_0 zu bestimmen. Eine Lösung dieser beiden Probleme war bisher jedoch nicht möglich.

Bevor wir dieses Kapitel abschließen, sollte zumindest noch erwähnt werden, daß man die bisherigen Methoden sehr leicht auf die Konstruktion baryonischer Zustände ausdehnen kann. Im Ansatz (5.23) für die Mesonoperatoren kann man nämlich $Q^{(p)+}(\gamma_i)$ ohne weiteres durch $Q^{(N-p)}(\gamma_i)$ ersetzen, da die beiden Darstellungen Λ_p^* und Λ_{N-p} der SU(N) äquivalent sind. Der Ansatz (5.23) enthält dann $2N$ Quarkfelder und $p + (N-p) = N$ Antiquarkfelder und beschreibt damit einen baryonischen Zustand. Ein allgemeiner Ansatz für Baryonen sollte natürlich N angezogene Quarkfelder $Q^{(p)}(\gamma_i)$ an N verschiedenen Punkte $y_1, y_2, \dots, y_N$ enthalten, die mittels modifizierter Strings $P(0)$ und des ϵ -Tensors eichinvariant verknüpft werden. Ein solcher Ansatz führt für allgemeines N auf sehr komplizierte Bindungsgleichungen und soll hier nicht weiter untersucht werden.

6. SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die im letzten Kapitel konstruierten Mesonoperatoren M können als Erzeuger wechselwirkender Teilchen interpretiert werden. Betrachtet man nämlich die infinitesimale Zeitentwicklung von Produktzuständen $M_1 M_2 |\Omega\rangle$, die durch $[H, M_1 M_2] |\Omega\rangle$ gegeben ist, so tauchen in $[H, M_1] M_2 |\Omega\rangle$ Linearkombinationen von eichvarianten Vernichtern U zwischen M_1 und M_2 auf. Verschiebt man diese Vernichter nun nach rechts, wo sie das Vakuum vernichten, so bleibt im allgemeinen ein nicht verschwindender Kommutator mit M_2 übrig. Die Zeitentwicklung von M_2 wird also durch die Anwesenheit von M_1 beeinflusst, was als Wechselwirkung zwischen den beiden Mesonen gedeutet werden kann.

Diese Beobachtung zeigt, daß die QCD_2 auch im masselosen Fall eine nichttriviale Feldtheorie ist, und unterstützt somit entsprechende Vermutungen von Sorensen und Thomas⁽³⁸⁾. Sorensen und Thomas haben gezeigt, daß man nach Integration über die Quarkfelder im Pfadintegral für die QCD_2 kein Gauss'sches Integral über die verbleibenden Gluonfreiheitsgrade erhält (im Gegensatz zum Schwinger Modell), und damit sind die Greensfunktionen der QCD_2 nicht äquivalent zu denen einer freien Theorie. Der Versuch, eine Operatorlösung der QCD_2 auf der bekannten Lösung des Schwinger Modells aufzubauen⁽³⁹⁾, führt vielmehr auf die Analyse einer anderen Eichtheorie mit der maximalen abelschen Untergruppe von $SU(N)$ als Eichgruppe^(39,40), und kann deshalb keine Aussagen über mögliche Phasenübergänge der massiven QCD_2 liefern (vgl. hierzu auch die Diskussion in⁽³⁸⁾).

In diesem Zusammenhang sind einige Bemerkungen über die masselosen Teilchen des $U(1)$ -Sektors angebracht. Unabhängig von eventuellen Schwierigkeiten, die durch die Lichtkegelquantisierung hervorgerufen werden könnten, haben wir im Kapitel 4 gesehen, daß die masselosen Mesonen in der masselosen $SU(N)$ - QCD_2 für beliebiges N existieren. Als einzige Voraussetzung wurde der Schwingenterm im Stromkommutator (2.32d) oder äquivalent dazu die lineare Divergenz der Quarkzweipunktfunktion für kurze Abstände benötigt, die sich jedoch auch im Pfadintegralformalismus ergibt⁽³⁸⁾ und damit nicht fraglich ist. Dieser Beobachtung widersprechen Rechnungen von Kikkawa⁽⁴¹⁾ und Durgut und Pak⁽⁴²⁾, die bei Berücksichtigung

von $\frac{1}{N}$ -Korrekturen zur 't Hooft Gleichung eine imaginäre Masse für die $U(1)$ -Mesonen finden, was dann als Anzeichen für einen Phasenübergang in der massiven QCD_2 gedeutet wird⁽⁴³⁾. Mit den Ergebnissen des vierten Kapitels ist diese Interpretation nicht mehr haltbar. Die Ergebnisse in (41,42) deuten vielmehr auf ein Zusammenbrechen der üblichen $1/N$ -Entwicklung in der masselosen QCD_2 hin^(38,41). Die masselosen Teilchen des $U(1)$ -Sektors haben auch nichts mit spontaner Symmetriebrechung zu tun (in zwei Dimensionen gibt es keine spontane Brechung kontinuierlicher Symmetrien und keine Goldstone Bosonen^(33,44)), sondern sind rein eine Folge der $1+1$ dimensionalen Kinematik⁽³¹⁾.

Ein wichtiges Ziel dieser Arbeit, nämlich die Berechnung des Meson-spektrums, wurde im störungstheoretischen Grenzfall voll erreicht. Für diesen Fall konnte eine analytische Lösung der Bindungsgleichungen angegeben werden, und das Massenspektrum ist durch die Nullstellen der konfluenten hypergeometrischen Funktion gegeben. Diese analytische Lösung ist auch deshalb sehr interessant, weil die Schrödingergleichung (3.8) eng mit der 't Hooft Gleichung zusammenhängt, und so sollte es möglich sein, über diese Lösung zusätzliche Informationen über Struktur und Lösung der 't Hooft Gleichung zu gewinnen.

Ein weiteres wesentliches Ergebnis dieser Arbeit stellen die Methoden des fünften Kapitels dar. Neben der Konstruktion exakter Energieeigenzustände bieten sie die Möglichkeit, das Spektrum der masselosen QCD_2 nichtperturbativ zu bestimmen, wenn dem gewisse technische Schwierigkeiten auch noch entgegenstehen. Darauf aufbauend stellt sich nun die Frage, inwieweit diese Methoden auf die vierdimensionale QCD (QCD_4) übertragen werden können.

Eine solche Übertragung, insbesondere bei Verwendung modifizierter Strings, führt automatisch auf eine nichtperturbative Beschreibung des Gluonsektors und ist deshalb natürlich sehr interessant. Gegenüber der QCD_2 ergeben sich dabei zwei Hauptprobleme: das Renormierungsproblem ist in vier Dimensionen ungleich schwieriger als in zweien, und zweitens können zwei Raumpunkte nun über ein Kontinuum von Wegen miteinander verbunden werden, auf denen jeweils der Paralleltransporter definiert werden

kann. Um Zustände endlicher Energie zu erhalten, muß über alle Wege gemittelt werden, und dieser Mittelungsprozeß bringt neue Schwierigkeiten mit sich.

Bis auf diese Frage der Wegabhängigkeit können viele Problem der QCD_4 bereits im einfacheren Fall der QCD_2 untersucht werden, und diese Arbeit und insbesondere die Betrachtungen des fünften Kapitels sollten als ein Schritt in dieser Richtung verstanden werden.

Mein besonderer Dank gebührt Herrn Dr. Roberto D. Peccei für die Betreuung dieser Arbeit und für die vielen Dinge, die er mich in unzähligen Unterhaltungen gelehrt hat. Herrn Professor Dr. H. Fritzsch und vielen anderen Mitarbeitern des Max Planck-Instituts für Physik und Astrophysik danke ich für anregende Diskussionen. Diese Arbeit hätte nicht ausgeführt werden können ohne die finanzielle Unterstützung des Werner Heisenberg-Instituts für Physik und der Studienstiftung des deutschen Volkes, für die ich mich hiermit bedanken möchte.

Anhang A: NOTATION UND KONVENTIONEN

a) Minkowskiraum, Metrik und Spinormatrizen

In der vorliegenden Arbeit werden Punkte des Minkowskiraums im allgemeinen mit (x, t) bezeichnet, wobei die t -Abhängigkeit vielfach unterdrückt wird, wenn in der Hamiltonschen Formulierung zu fester Zeit gearbeitet wird. Wo eine lorentzkovariante Schreibweise zu bevorzugen ist, wird der metrische Tensor $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1$) mit

$$g_{00} = -g_{11} = +1 \quad (A.1)$$

und der total antisymmetrische Tensor $\varepsilon_{\mu\nu}$ mit

$$\varepsilon^{01} = -\varepsilon_{01} = +1 \quad (A.2)$$

benutzt. Die 2x2 Spinormatrizen sind

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (A.3)$$

Mit diesen Konventionen ergibt sich die Beziehung

$$\gamma_\mu \gamma_5 = \varepsilon_{\mu\nu} \gamma^\nu \quad (A.4)$$

die im Abschnitt 2.2 benutzt wurde.

b) Lichtkegelkoordinaten

Im Abschnitt 3.2 werden Lichtkegelkoordinaten

$$\hat{x} = (x^+, x^-) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 + x^1), \frac{1}{\sqrt{2}} (x^0 - x^1) \right) \quad (A.5)$$

benutzt. Die Abbildung von normalen Koordinaten (x^0, x^1) auf Lichtkegelkoordinaten wird durch die Matrix

$$C = C^\sigma{}_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma = \pm, \quad \nu = 0, 1 \quad (A.6)$$

vermittelt, d.h.

$$\hat{x}^{\sigma} = C^{\sigma}_{\nu} x^{\nu} \quad (\text{A.7})$$

Mittels dieser Abbildung kann man z.B. den metrischen Tensor auf Lichtkegelkoordinaten übertragen, und erhält

$$\hat{g}_{\sigma s} = \hat{g}^{\sigma s} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

woraus insbesondere $x_+ = x_-$ folgt und

$$x \cdot y = x_{\mu} y^{\mu} = \hat{x}_{\sigma} \hat{y}^{\sigma} = x^{-} y^{+} + x^{+} y^{-} \quad (\text{A.9})$$

Dieser "Vorzeichenwechsel" bei Anwendung des metrischen Tensors hat wichtige Konsequenzen. Insbesondere ist der d'Alembert Operator nun gegeben durch

$$\square = \partial_{\mu} \partial^{\mu} = 2 \partial_{+} \partial_{-} \quad (\text{A.10})$$

und ist damit linear in der "Zeitableitung" $\partial_{+} = \frac{\partial}{\partial x^{+}}$, was in Gl. (3.66) ausgenutzt wurde.

Die Spinormatrizen

$$\gamma^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma^0 \pm \gamma^1) \quad (\text{A.11})$$

führen nun auf die Beziehungen

$$\gamma^{+} \gamma^{+} = \gamma^{-} \gamma^{-} = 0 \quad (\text{A.12})$$

und

$$\frac{1}{2} \gamma^{+} \gamma^{-} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2} \gamma^{-} \gamma^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$\frac{1}{2} \gamma^{\pm} \gamma^{\mp}$ projiziert damit auf die erste bzw. zweite Spinorkomponente.

Eine weiterführende Diskussion der Lichtkegelkoordinaten (in vier Dimensionen) findet man in⁽²⁶⁾.

c) Farbmatrizen

Die Generatoren der fundamentalen Darstellung der $SU(N)$ werden mit $\frac{\lambda^a}{2}$ bezeichnet. Dabei bezeichnet λ^a die übliche Erweiterung der hermiteschen Gell-Mann Matrizen⁽⁴⁵⁾ auf N Dimensionen. Die λ^a sind normiert auf

$$\text{Sp } \frac{\lambda^a}{2} \frac{\lambda^b}{2} = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (\text{A.14})$$

und definieren über

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (\text{A.15})$$

die Strukturkonstanten der $SU(N)$. Die Normierung der Generatoren $\frac{\tilde{\lambda}^a}{2}$ beliebiger Darstellungen der $SU(N)$ ist festgelegt, wenn (A.15) auch für die $\tilde{\lambda}$ gefordert wird.

Für Operatoren Q^a in der adjungierten Darstellung von $SU(N)$ wird die Bezeichnung Q für die Kontraktion mit den Generatoren einer beliebigen Darstellung verwandt, d.h.

$$Q = \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} Q^a \quad (\text{A.16})$$

Aus dem Zusammenhang ist stets ersichtlich, welche Darstellung gemeint ist. In gleicher Weise wird das Kürzel D_μ für kovariante Ableitungen in beliebigen Darstellungen der $SU(N)$ verwandt, d.h.

$$D_\mu = \partial_\mu 11 - ig A_\mu^a \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} = \partial_\mu 11 - ig A_\mu \quad (\text{A.17})$$

Anhang B: IDENTITÄTEN FÜR MODIFIZIERTE STRINGOPERATOREN

In den Abschnitten 3.1 und 5.2 werden Operatoreinschübe aus dem (modifizierten) String herausgezogen. Die entsprechenden Kommutatoren sollen nun berechnet werden. Zu betrachten ist

$$\left[S(x) (j_0^a(x) + \alpha j_1^a(x)) + \tau(x) F_{01}^a(x), P(0)_x^\gamma Q^{(p)}(\gamma) \right] \quad (\text{B.1})$$

mit $s(y) = 0$ und

$$O(z) = \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} C(z) F_{01}^a(z) \quad (B.2)$$

Wegen $s(y) = 0$ verschwindet der Kommutator des $:\bar{q}q:$ -Anteils der Ströme mit $Q^{(p)}(y)$, und (B.1) reduziert sich auf

$$\begin{aligned} & \left[\kappa s(x) \frac{g}{2\pi} A_1^a(x) + \tau(x) F_{01}^a(x), P(0)_x^\gamma \right] Q^{(p)}(y) \\ &= \left[\kappa s(x) \frac{g}{2\pi} A_1^a(x) + \tau(x) F_{01}^a(x), 1 - ig \int_x^\gamma dz (A_1(z) + O(z)) P(0)_z^\gamma \right] Q^{(p)}(y) \\ &= -ig \frac{\tilde{\lambda}^b}{2} \int_x^\gamma dz \left\{ \frac{g}{2\pi} \kappa s(x) C(z) [A_1^a(x), F_{01}^b(z)] + \tau(x) [F_{01}^a(x), A_1^b(z)] \right\} P(0)_z^\gamma Q^{(p)}(y) \\ &= g \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} \left\{ \frac{g}{2\pi} \kappa s(x) C(x) - \tau(x) \right\} \int_x^\gamma dz \delta(x-z) P(0)_x^\gamma Q^{(p)}(y) \end{aligned} \quad (B.3)$$

Das in (B.3) auftauchende Integral $\int_x^\gamma dz \delta(x-z)$ muß nun geeignet definiert werden. Bei der Diskussion des störungstheoretischen Grenzfalls hatten wir gesehen, daß dieses Integral den Wert $\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\gamma-x)$ haben muß, damit das Coulombpotential in (3.15) die richtige Stärke erhält. Diese Wahl bzw. die dazu äquivalente Definition des Kommutators (B.1) mittels symmetrischem Limes (vgl. (3.16)) muß aus Konsistenzgründen auch hier getroffen werden, und so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left[s(x) (j_0^a(x) + \kappa j_1^a(x)) + \tau(x) F_{01}^a(x), P(0)_x^\gamma Q^{(p)}(y) \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[s(x+\varepsilon) (j_0^a(x+\varepsilon) + \kappa j_1^a(x+\varepsilon)) + \tau(x+\varepsilon) F_{01}^a(x+\varepsilon), P(0)_x^\gamma Q^{(p)}(y) \right] \\ &= \frac{g}{2} \operatorname{sgn}(\gamma-x) \left\{ \frac{g}{2\pi} \kappa s(x) C(x) - \tau(x) \right\} \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(0)_x^\gamma Q^{(p)}(y) \end{aligned} \quad (B.4)$$

und damit Gl.(5.31) aus Abschnitt 5.2.

Für die Bestimmung eichvarianter Vernichtungsoperatoren im Abschnitt 5.1 wird eine Formel für die partielle Integration von kovarianten Ableitungen in modifizierten Strings benötigt. Diese Formel soll nun abgeleitet werden. Dazu gehen wir aus von

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx \left\{ P(0)_{\gamma_1}^\gamma \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} (D_1 u)^a(x) - \frac{d}{dx} \left[P(0)_{\gamma_1}^\gamma \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(0)_x^{\gamma_2} u^a(x) \right] \right\} \quad (B.5)$$

wobei O durch (B.2) gegeben ist und U ein beliebiges Operatorfeld in der adjungierten Darstellung von $SU(N)$ sein soll. Benutzt man die Tatsache, daß $A_1^b(x) + O^b(x)$ mit $P(O)_x^{\gamma_2}$ kommutiert, so erhält man

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \left[P(O)_{\gamma_1}^x \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(O)_x^{\gamma_2} U^a(x) \right] \\
 &= P(O)_{\gamma_1}^x (-ig) \left[A_1(x) + O(x), \frac{\tilde{\lambda}^c}{2} \right] P(O)_x^{\gamma_2} U^c(x) + P(O)_{\gamma_1}^x \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(O)_x^{\gamma_2} \partial_x U^a(x) \quad (B.6) \\
 &= P(O)_{\gamma_1}^x \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(O)_x^{\gamma_2} \left\{ \partial_x U^a(x) + g f^{bca} (A_1^b(x) + O^b(x)) U^c(x) \right\} \\
 &= P(O)_{\gamma_1}^x \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(O)_x^{\gamma_2} \left\{ (D_1 U)^a(x) + g f^{abc} O^b(x) U^c(x) \right\}
 \end{aligned}$$

Hieraus folgt zunächst, daß (B.5) für $U(x) = \gamma(x) F_{01}(x)$ identisch verschwindet, was im fünften Kapitel zur Ableitung von Gl. (5.8) ausgenutzt wurde. Für beliebiges U läßt man $O(x)$ am besten innerhalb des String und kommutiert nur $A_1^b(x)$ nach rechts, wobei der Kommutatorterm

$$\begin{aligned}
 & P(O)_{\gamma_1}^x (-ig) \left[\frac{\tilde{\lambda}^b}{2}, \frac{\tilde{\lambda}^c}{2} \right] \left[A_1^b(x), P(O)_x^{\gamma_2} \right] U^c(x) \\
 &= P(O)_{\gamma_1}^x \left\{ g f^{bca} \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} \right\} \left\{ \frac{g}{2} \operatorname{sgn}(\gamma_2 - x) \frac{\tilde{\lambda}^b}{2} C(x) \right\} P(O)_x^{\gamma_2} U^c(x) \quad (B.7)
 \end{aligned}$$

neu auftaucht. Nun gilt für die Generatoren $\frac{\tilde{\lambda}^a}{2}$ einer beliebigen Darstellung der $SU(N)$

$$f^{bca} \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} \frac{\tilde{\lambda}^b}{2} = \frac{1}{2} f^{abc} \left[\frac{\tilde{\lambda}^a}{2}, \frac{\tilde{\lambda}^b}{2} \right] = \frac{i}{2} f^{abc} f^{abd} \frac{\tilde{\lambda}^d}{2} = i \frac{N}{2} \frac{\tilde{\lambda}^c}{2} \quad (B.8)$$

und damit vereinfacht sich (B.7) auf

$$P(O)_{\gamma_1}^x i g^2 \frac{N}{4} \operatorname{sgn}(\gamma_2 - x) C(x) \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(O)_x^{\gamma_2} U^a(x) \quad (B.9)$$

Faßt man nun alle Terme zusammen, so erhält man schließlich

$$\begin{aligned}
 & \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx \left\{ P(O)_{\gamma_1}^x \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(O)_x^{\gamma_2} (D_1 U)^a(x) - \frac{d}{dx} \left[P(O)_{\gamma_1}^x \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} P(O)_x^{\gamma_2} U^a(x) \right] \right\} \\
 &= \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} dx P(O)_{\gamma_1}^x \left\{ ig \left[O(x), \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} \right] - i g^2 \frac{N}{4} \operatorname{sgn}(\gamma_2 - \gamma_1) C(x) \frac{\tilde{\lambda}^a}{2} \right\} P(O)_x^{\gamma_2} U^a(x) \quad (B.10)
 \end{aligned}$$

und diese Identität wurde zur Ableitung von Gl.(5.10) benutzt.

Betrachtet man die analoge Rechnung für das Schwinger Modell, so folgt aus (B.8) sofort, daß N durch Null ersetzt werden muß. Damit verschwindet die rechte Seite von (B.10) im $U(1)$ -Fall, und als Folge hiervon reduzieren sich die Bindungsgleichungen im Schwinger Modell auf ein lineares System (vgl. die Diskussion im Abschnitt 5.3).

LITERATURVERZEICHNIS

- (1) Eichtheorien und speziell die Behandlung des Standardmodells sind inzwischen Lehrbuchstoff geworden, z.B. P. Becher, M. Böhm, H. Joos: Eichtheorien der starken und elektroschwachen Wechselwirkung; Teubner, Stuttgart (1981);
Übersichtsartikel sind z.B.
E.S. Abers, B.W. Lee, Phys. Rep. 9 (1973) 1;
H. Fritzsch, P. Minkowski, Phys. Rep. 73 (1981) 67;
- (2) G. Arnison et al., Phys. Lett. 122B (1983) 103;
Phys. Lett. 126B (1983) 398;
M. Banner et al., Phys. Lett. 122B (1983) 476;
P. Bagnaia et al., Phys. Lett. 129B (1983) 130;
- (3) T. Kinoshita, W.B. Lindquist, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 1573;
J. Bailey et al., Nucl. Phys. B150 (1979) 1;
- (4) S.R. Lundeen, F.M. Pipkin, Phys. Rev. Lett. 46 (1981) 232;
- (5) J. Schwinger, Phys. Rev. 128 (1962) 2425;
- (6) J.H. Lowenstein, J.A. Swieca, Ann. Phys. 68 (1971) 172;
- (7) S. Coleman, R. Jackiw, L. Susskind, Ann. Phys. 93 (1975) 267;
S. Coleman, Ann. Phys. 101 (1976) 239;
- (8) W. Thirring, Ann. Phys. 3 (1958) 91;
- (9) B. Klaiber, Lectures in Theoretical Physics, Boulder Lectures 1967, S. 141, Gordon and Breach, New York (1968);
- (10) S. Coleman, Phys. Rev. D11 (1975) 2088;
- (11) H. Bergknoff, H.B. Thacker, Phys. Rev. D19 (1979) 3666;
H.B. Thacker, Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 253;
- (12) R.F. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, Phys. Rev. D11 (1975) 3424;
- (13) R. Rajaraman, Phys. Rep. 21 (1975) 227;
- (14) G. 't Hooft, Nucl. Phys. B75 (1974) 461;
- (15) A.J. Hanson, R.D. Peccei, M.K. Prasad, Nucl. Phys. B121 (1977) 477;
- (16) C. Itzykson, J.B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, New York (1980);
- (17) R.P. Feynman, Nucl. Phys. B188 (1981) 479;

- (18) J. Schwinger, Phys. Rev. Lett. 3 (1959) 296;
K. Johnson, Nucl. Phys. 25 (1961) 431;
- (19) I. Bars, M.B. Green, Phys. Rev. D17 (1978) 537;
- (20) R. Jackiw, Dynamical Symmetry Breaking, in "Laws of Hadronic Matter", Erice Lectures 1973, ed. A. Zichichi, Periodici Scientifici, Milano (1975);
- (21) S. Coleman, Ann. Phys. 101 (1976) 239;
- (22) A.J. Hanson, R.D. Peccei, M.K. Prasad: Two Dimensional SU(N) Gauge Theory, Strings and Wings: Comparative Analysis of Meson Spectra and Covariance, SLAC-PUB-1816 (1976);
- (23) M. Abramowitz, I.A. Stegun ed.: Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series 55 (1964);
- (24) F. Fucito et al., Nucl. Phys. B210 (1982) 407;
M. Creutz, L. Jacobs, C. Rebbi, Phys. Rep. 95 (1983) 201;
- (25) W. Buchmüller, S.T. Love, R.D. Peccei, Phys. Lett. 108B (1982) 426;
- (26) J.B. Kogut, D.E. Soper, Phys. Rev. D1 (1970) 2901;
- (27) E. Witten, Nucl. Phys. B160 (1979) 57;
- (28) V. Baluni, Phys. Lett. 90B (1980) 407;
- (29) P.J. Steinhardt, Nucl. Phys. B176 (1980) 100;
- (30) J. Kogut, L. Susskind, Phys. Rev. D11 (1975) 3594;
M.B. Halpern, Phys. Rev. D13 (1976) 337;
- (31) D. Amati, Kuang Chao Chou, S. Yankielowicz, Phys. Lett. 110B (1982) 309;
- (32) S. Elitzur, Y. Frishman, E. Rabinovici, Phys. Lett. 106B (1981) 403;
- (33) S. Coleman, Comm. Math. Phys. 31 (1973) 259;
- (34) S. Mandelstam, Phys. Rev. D11 (1975) 3026;
- (35) C.G. Callan, R.F. Dashen, D.H. Sharp, Phys. Rev. 165 (1968) 1883;
- (36) M. Hamermesh: Group Theory and its Application to Physical Problems, Addison Wesley, Reading (1962);
- (37) R.P. Feynman: Photon Hadron Interactions, W.A. Benjamin Inc., Reading (1972);

- (38) C. Sorensen, G.H. Thomas, Phys. Rev. D21 (1980) 1625;
- (39) P. Mitra, P. Roy, Phys. Lett. 79B (1978) 469;
Phys. Rev. D21 (1980) 511, 521, 2926;
- (40) L.V. Belvedere, J.A. Swieca, K.D. Rothe, B. Schroer,
Nucl. Phys. B153 (1979) 112;
G. Wanders: Diagonal QCD₂ with massless quarks: gauge
transformations and mass perturbation;
Univ. de Lausanne preprint (1983);
- (41) K. Kikkawa, Ann. Phys. 135 (1981) 222;
- (42) M. Durgut, N.K. Pak: SU(N)-QCD₂ Meson Equation in Next-to
Leading Order; ICTP-Trieste preprint, IC/82/111 (1982);
M. Durgut, N.K. Pak, Phys. Lett. B117 (1982) 453;
- (43) S.B. Libby, Chung-I Tan, Phys. Lett. 115B (1982) 477;
- (44) N.D. Mermin, H. Wagner, Phys. Rev. Lett. 17 (1966) 1133;
- (45) D.B. Lichtenberg: Unitary Symmetry and Elementary Par-
ticles; Academic Press, London (1970).

LEBENS LAUF

Am 17. Mai 1956 wurde ich in Bremge, Kreis Olpe als Sohn des Kaltwalzers Johannes Zeppenfeld und seiner Ehefrau Hilde Zeppenfeld, geb. Perchalla geboren.

Nach Besuch der Volksschule und des Gymnasiums legte ich am 3.6.1975 das Abitur am städt. Gymnasium Attendorn ab. Das 12. Schuljahr verbrachte ich als Austauschschüler des AFS/International Scholarships in Chowchilla, Kalifornien.

Im WS 1975/76 begann ich mit dem Studium der Physik und der Mathematik an der Universität Münster. Nach dem Vordiplom wechselte ich 1977 an die Universität München, wo ich am 19.11.1980 das Diplom in Physik erwarb. Seitdem arbeite ich am Max-Planck-Institut für Physik an meiner Doktorarbeit.

Seit 1977 bin ich mit Dorothea Zeppenfeld, geb. Thierauf verheiratet. Wir haben drei Kinder.

